SEP 15 1925

Physikalische Zeitschrift

begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 14. Ausgegeben am 25. August 1925. No. 690. Printed in Germany. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

B. Gudden u. R. Pohl, Zur Kenntnis der Elektronenleitung in Kristallen.

W. Dällenbach, Zur Phänomenologie des Funkenpotentials und der Glimmentladung.

G. Valle, Über die Zündspannung der Glimmentladung, zugleich Bemerkungen zu H. Geffckens Arbeit: „Zündspannung und Stabilität der Glimmentladung".

B. Iliin, Adsorption und Oberflächenenergie an der Trennungsgrenze verschiedener Phasen.

Ippisch, Die Zunahme der Dispersion der Energie einer kanonischen Gesamtheit von Gasen.

Besprechungen:

M. Born, Vorlesungen über Atomdynamik. I.

B. Gutenberg, Die seismische Bodenunruhe und ihr Zusammenhang mit den Nachbargebieten, insbesondere Geologie und Meteorologie.

E. Picard, Mélanges de mathématiques et de physique.

E. Warburg, Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge.

F. P. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.

Tagesereignisse. Personalien.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

VERLAG S. HIRZEL / LEIPZIG

Von Hütte zu Hütte

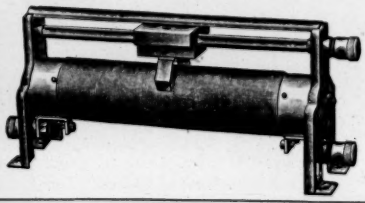
Führer zu den Schutzhütten der Ostalpen

Von **Dr. Jos. Moriggl**
Generalsekretär d. Deutschen u. Österreichischen Alpenvereins

I. Bd.: Bregenzer Wald, Allgäuer Alpen und Tannheimer Gruppe, Lechtaler Alpen, Wettersteingebirge, Karwendelgebirge, Rofangruppe, Bayerische Voralpen westlich des Inn. 3. Aufl. 1922. Ganzleinenband M. 5.—
II. Bd.: Rhätikon, Ferwallgruppe, Silvretta u. Samnaungruppe, Oetztaler und Stubaier Alpen. 2. Aufl. 1922. Halbleinenband M. 4.—
III. Bd.: Zillertaler Alpen, Venediger-Gruppe, Rieserferner-Gruppe, Villgratner Berge, Granatspitz-Gruppe, Glockner-Gruppe, Schober-Gruppe, Kitzbüheler Alpen. 2. Aufl. 1924. Ganzleinenband M. 5.—
VI. Bd.: Kaisergebirge, Chiemgauer Alpen, Salzburgische u. Steierische Kalkalpen, Ober- u. Niederösterr. Voralpen, Cetische Alpen. 2. Aufl. 1925. Ganzleinenband M. 8.—
IV. Bd.: Sesvenna, Ortler, Adamello, Etschtaler-, Sarntaler Alpen, Dolomiten, Fleimstaler-, Vicentiner- u. Belluneser Alpen. (2. Aufl. erscheint 1926.)
V. Bd.: Östliche Hohe Tauern, Niedere Tauern, Norische Alpen, Südöstliche Kalkalpen. (2. Auflage erscheint 1927.)

Aus den zahlreichen Besprechungen: . . . Der Führer bietet weit mehr, als der Titel besagt. Es sind Hunderte von Wegen, die bisher noch in keinem einzigen Reiseführer, auch nicht im „Hochtouristen" so beschrieben sind, daß man sich danach zurechtfinden und die Schwierigkeiten des Weges abschätzen könnte, eingehend behandelt . . . Das Werk muß als wertvoller Behelf für führerlose Bergsteiger bezeichnet werden und wird auch dem Hochtouristen schätzbare Dienste leisten. Ein Hauptvorteil des Buches liegt darin, daß die Routenkärtchen und Text zusammen die Aufstellung von Tourenplänen erleichtern, wie kein anderer Ostalpenführer. Häufig begangene Wege sind in beiden Wegrichtungen beschrieben.
Mitteilungen des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins.

PHYWE - **Gleitwiderstände**



Absolut zuverlässig
Denkbar einfach — Unerreicht billig
Verlangen Sie Liste PZW.

Physikalische Werkstätten A.-G.
Göttingen

Dr. Steeg & Reuter ~ Bad Homburg vor der Höhe

Kristalloptik

Polarisations-Prismen — Polarisations-Instrumente — Spektralprismen aus Quarz und Glas

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 14. 15. Juli 1925. 26. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 16 am 5. August 1925.

INHALT:

Originalmitteilungen:

B. Gudden u. R. Pohl, Zur Kenntnis der Elektronenleitung in Kristallen. S. 481.

W. Dällenbach, Zur Phänomenologie des Funkenpotentials und der Glimmentladung. S. 483.

Ji. Valle, Über die Zündspannung der Glimmentladung, zugleich Bemerkungen zu H. Geffckens Arbeit: „Zündspannung und Stabilität der Glimmentladung". S. 495.

B. Hiin, Adsorption und Oberflächenenergie an der Trennungsgrenze verschiedener Phasen. S. 497.

Ippisch, Die Zunahme der Dispersion der Energie einer kanonischen Gesamtheit von Gasen. S. 501.

Besprechungen:

M. Born, Vorlesungen über Atomdynamik. I. S. 506.

B. Gutenberg, Die seismische Bodenunruhe und ihr Zusammenhang mit den Nachbargebieten, insbesondere Geologie und Meteorologie. S. 507.

E. Picard, Melanges de mathématiques et de physique. S. 507.

E. Warburg, Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge. S. 508.

F. P. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. S. 508.

Tagesereignisse. S. 508.

Personalien. S. 508.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Kenntnis der Elektronenleitung in Kristallen.

Von B. Gudden und R. Pohl.

Unter gleichem Titel hat Herr Lenz in Heft 10 dieser Zeitschrift Teilergebnisse einer Untersuchung über lichtelektrische Leitung in Kristallen veröffentlicht. Er berichtet, daß der stationäre lichtelektrische Primärstrom bei der Temperatur der flüssigen Luft in Zinkblende fehlt, in Diamant nur etwa $^1/_9$ seines bei Zimmertemperatur gemessenen Wertes besitzt. Aus diesem Befunde schließt Herr Lenz Folgendes:

„Damit ist einwandfrei erwiesen, daß der sogenannte lichtelektrische Strom nicht durch Beleuchtung allein entsteht, sondern auch eine thermische Anregung erfordert. Man sollte ihn thermo-lichtelektrischen Strom nennen. Im Gegensatz zu der gewöhnlichen metallischen Leitfähigkeit, die ja mit abnehmender Temperatur bis zur Supraleitfähigkeit enorm zunimmt, liegt hier ein Elektronenstrom vor, der mit sinkender Temperatur abnimmt, sogar verschwindet. An eine theoretische Deutung dieses Verhaltens konnte bisher nicht gedacht werden".

Wir fürchten, daß diese Fassung zu großen Mißverständnissen führen kann.

Die uns bekannten Beobachtungen hatten zu folgender Auffassung geführt: Pro absorbiertes $h\nu$ wird ein Elektron abgespalten. Dies bewegt sich im elektrischen Felde auf die Anode zu und erreicht sie in den günstigsten Fällen[1]). Der Abwanderung der Elektronen folgt ein Ersatz aus der Richtung der Kathode[1]). Er wird durch Wärmebewegung oder Absorption geeigneten, meist langwelligen, Lichtes eingeleitet. Auch können Elektronen auf ihrer Wanderung zur Anode vorher abgewanderte Elektronen ersetzen. Dieser letztere Fall ermöglicht überhaupt erst stationäre Ströme auch in solchen Kristallen, in denen die Elektronen nur Bruchteile der Kristalldicke zu durchlaufen vermögen.

Nach diesem Bilde kann eine Temperaturabhängigkeit lichtelektrischer Primärströme sowohl auf Änderung der Lichtabsorption als auch auf einer Änderung in Abwanderung bzw. Ersatz der Elektronen beruhen.

Den großen Einfluß der Temperatur auf die spektrale Verteilung der Lichtabsorption und damit der lichtelektrischen Leitung möchten wir kurz mit Messungen an gelbbraun verfärbten, lichtelektrisch leitenden $NaCl$-Kristallen belegen. Fig. 1a gibt, bezogen auf gleiche auffallende Lichtenergie, die spektrale Verteilung des lichtelektrischen Stromes bei Zimmertemperatur; Fig. 1b ceteris paribus bei der Temperatur der flüssigen Luft[2]). Je nach der benutzten Wellenlänge kann man also beim Übergang zu tiefen Temperaturen den lichtelektrischen Primärstrom konstant bleiben, anwachsen oder verschwinden sehen. Dabei läßt sich dies Schmalerwerden der selektiven optischen Absorptionsbande leicht auch optisch (qualitativ schon mit dem Auge!) verfolgen. Wir werden

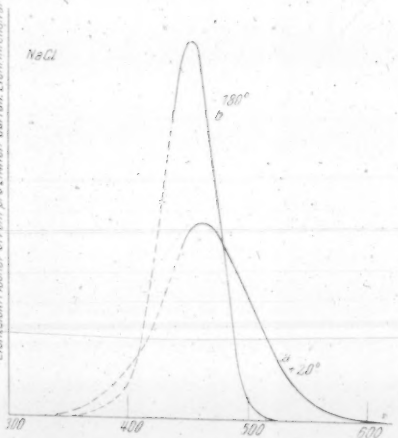
1) Negativer Primärstromanteil.

1) Positiver Primärstromanteil.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Phys. 31, 652, 1925, Anm. 1.

die Zahlen in einer ausführlicheren Mitteilung bringen.

Bei ZnS und Diamant findet sich lichtelektrische Leitung nur in dem langwelligen Ausläufer der konstitutionellen ultravioletten Absorptionsbande[1]). Dieses Gebiet schwacher Absorption verschmälert sich ebenfalls erheblich bei tiefer Temperatur. Infolgedessen sind selbstverständlich die auf auffallende Lichtenergie bezogenen lichtelektrischen Primärströme kleiner als bei Zimmertemperatur, und zwar umso ausgesprochener, je langwelliger die benutzte Strahlung ist. Beispielsweise fanden wir an ver-



——— mit Hg-Linien, ——— mit W-Lampe gemessen.
Beide Figuren in gleichem Ordinatenmaßstab.

schiedenen ZnS-Stücken[2]) die Abnahme der Ströme bei Bestrahlung mit 436 $m\mu$ um ein mehrfaches größer, als bei Benutzung von 365 $m\mu$. Quantitatives behalten wir ebenfalls der ausführlichen Darstellung vor.

Herr Lenz erwähnt einen Einfluß geänderter Lichtabsorption mit keinem Wort, und infolgedessen könnte sein eingangs zitierter Satz dahin verstanden werden, daß die lichtelektrische Leitung in Kristallen einen, noch dazu positiven, Temperaturkoeffizienten hat. Unseres Erachtens kann man das den von Herrn Lenz veröffentlichten Messungen in keiner Weise entnehmen.

Man kann nach den kurzen Angaben der vorläufigen Veröffentlichung nicht feststellen, mit welcher Wellenlänge Herr Lenz gearbeitet hat. Es läßt sich daher nicht abschätzen, ob die Änderungen der optischen Absorption zur Deutung der Lenzschen Befunde ausreichen. Sollte das noch nicht der Fall sein, so scheint uns angesichts unserer positiven Befunde an $NaCl$, Diamant und ZnS der Gedanke an irgendwelche ungeklärte Nebeneinflüsse näher zu liegen, als der von Herrn Lenz gezogene Schluß. Auch uns ist es gelegentlich begegnet, daß einzelne Kristalle in flüssiger Luft keinen merklichen lichtelektrischen Strom ergaben. Mit einer Ausnahme (ein ZnS-Kristall mit gelblicher Fremdfärbung) haben wir in jedem Fall einen technischen Fehler auffinden und abstellen können. Als einzelne Beobachtungen mögen die Befunde von Herrn Lenz unbedenklich gelten, ihre Verallgemeinerung wird den Tatsachen nicht gerecht. Nach mündlicher Rücksprache befinden wir uns in Übereinstimmung mit Herrn Joffé-Leningrad. Herr Joffé hat ebenfalls schon seit langer Zeit lichtelektrische Ströme in flüssiger Luft beobachtet und die gleichen positiven Ergebnisse wie wir erhalten. Soweit die Temperaturfrage.

Im ersten Teil seiner Mitteilung berichtet Herr Lenz über Versuche, von außen Elektronen in das Kristallgitter „hineinzuschießen". Er glaubt damit wahrscheinlich gemacht zu haben, daß „in einen lichtelektrisch leitenden Kristall (ZnS) gedrungene freie Elektronen von der angelegten Spannung je nach dem Vorzeichen in der Richtung oder entgegen der Richtung der auftreffenden Kathodenstrahlen fortgeführt werden". Bei Kristallen ohne lichtelektrische Leitung (Quarz) fand er die Erscheinung nicht.

Die Beobachtungsergebnisse stimmen mit eigenen vor längerer Zeit an ZnS bzw. Kalkspat ausgeführten Versuchen völlig überein. Wir haben diese Versuche jedoch unveröffentlicht liegen lassen, weil sie uns für die aufgeworfene Frage nicht beweisend scheinen. Herr Lenz übersieht unseres Erachtens, daß die Kathodenstrahlen im Kristallinnern durch Elektronenstoß ebenso wirken, wie Licht im $h\nu$-Absorptionsprozeß. Es fehlt jeder Anhalt dafür, daß die Elektronen, die in den beobachteten Strömen wandern, mit den von außen hineingeschossenen identisch und nicht durch Elektronenstoß aus dem Gitter abgespalten sind. Daß sich Kathoden

1) Dieser langwellige Ausläufer der Absorption rührt unseres Erachtens von Atomen her, die durch thermische oder andersartige Störungen der Gitterstruktur vor ihrer Umgebung ausgezeichnet sind. Wir halten es für sehr wahrscheinlich, daß ganz allgemein die in einem $h\nu$-Prozeß absorbierte Energie nur dann als ein ganzes auf ein einzelnes Elektron übertragen wird, wenn die die Frequenz ν absorbierenden Atome in genügend kleiner Konzentration vorliegen. Dafür spricht unter anderem das Fehlen lichtelektrischer Leitung im Gebiete der starken Eigenabsorption der Kristalle.

2) Die Änderung der optischen Absorption durch die Abkühlung ist mit dem Auge zu erkennen.

strahlen und Licht bei der Elektronenabspaltung in ZnS gleich verhalten, hat erst kürzlich E. Rupp[1]) durch Strommessungen an phosphoreszierendem ZnS gezeigt.

Die Kernfrage, ob „die Isolatoren nur darum keinen elektrischen Strom leiten, weil die angelegte Spannung keine freien Elektronen in das Gitter hineindrücken kann", wird durch die angeführten Versuche unseres Erachtens nicht berührt.

1) Ann. d. Phys. **73**, 127, 1923; daselbst Zitate älterer Arbeiten von A. Becker u. a.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität, Juni 1925.

(Eingegangen 18. Juni 1925.)

Zur Phänomenologie des Funkenpotentials und der Glimmentladung.

(Nach einem Vortrag in der Physikalischen Gesellschaft Zürich, 2. Juli 1925.)

Von W. Dällenbach.

Einleitung. Die Erscheinungen des Funkenpotentials und der Glimmentladung kommen durch das Zusammenwirken einer großen Zahl von Ladungs- und Materieteilchen zustande. Die der Messung in erster Linie zugänglichen Zustandsgrößen, wie Ströme, Spannungen usw. sind Mittelwerte der Wirkungen von sehr vielen Elementarvorgängen. Andere solcher Wirkungen verwischen sich bei der Mittelwertsbildung und treten nach außen nicht oder nur undeutlich in Erscheinung. Die Elementarvorgänge bleiben daher durch die makroskopisch feststellbaren gesetzmäßigen Zusammenhänge relativ unbestimmt und könnten in weiten Grenzen anders verlaufen, ohne daß letztere sich wesentlich zu ändern brauchten. Solche Gesetzmäßigkeiten werden auch in anderen Gebieten der Physik als phänomenologische den Gesetzen der Einzelvorgänge gegenüber gestellt. Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit den phänomenologischen Gesetzen des Funkenpotentials und des Kathodenfalls der Glimmentladung in unedlen Gasen[1]).

Es handelt sich um theoretische Vorstellungen, die eine experimentelle Untersuchung begleiten sollten. Ich hatte die Absicht, sie erst mit den Versuchsergebnissen zusammen in Druck zu geben. Die Versuche mußten aber aus äußeren Gründen abgebrochen werden. So kann ich die Überlegungen nur ohne experimentelle Prüfung zur Diskussion stellen.

Zwischen zwei parallelen, praktisch unendlich ausgedehnten Platten bestehe in einem Gas vom Drucke p eine Glimmentladung der Stromdichte i. Durch eine mit der Gasstrecke in Serie geschaltete Glühkathodenröhre werde i konstant gehalten. Nähert man aus großer Entfernung die Anode der Kathode, so beobachtet man zunächst eine schwache Abnahme der Entladespannung, entsprechend dem Spannungsgefälle in der positiven Säule und dem stufenweisen Abbau des Anodenfalles[1]). Bei einem bestimmten Plattenabstand s erreicht die Spannung ein Minimum e. Verringert man den Abstand weiter, so folgt ein scharfer Anstieg der Potentialdifferenz über die Gasstrecke. Dieser Anstieg wird davon herrühren, daß die Anode in die sogenannten kathodischen Gebilde der Entladung eindringt und den die Elektronenbildung bewerkstelligenden Mechanismus behindert. Man wird daher richtigerweise s als die Breite der kathodischen Ionisationszone ansprechen und das Spannungsminimum e definieren als das Kathodengefälle der Glimmentladung. Diese Art der Messung von e ist ohne Zweifel der üblichen Sondenmethode überlegen, gegen die durch neuere Untersuchungen[2]), insbesondere von Langmuir unabweisbare Bedenken erhoben sind.

An einer Entladeröhre mit einer exakt und rasch parallel verschiebbaren Anode und einer Kathode mit Schutzring, beide aus Eisen, wurden bei Füllung mit Stickstoff und bei konstantem p viele Aufnahmen von e und s in Abhängigkeit von i gemacht und qualitativ ein Verlauf festgestellt, wie die Fig. 1 zeigt. Abweichend von dem in der Literatur[3]) oft angegebenen gestrichelt eingezeichneten Gang von e fanden wir den normalen Kathodenfall als ein ausgeprägtes, insbesondere nach kleinen Stromwerten flach verlaufendes Minimum. Der Wendepunkt W und das fallende Stück NG der Charakteristik wurden mehrmals beobachtet und durch wiederholte reproduzierbare Messungen auf und abwärts festgestellt. Für Ströme unterhalb des Grenzpunktes G war eine Messung

1) In Edelgasen von höherem Druck treten die Elementarvorgänge wegen des scharfen Schwellens der Energieabsorption deutlicher hervor. (Vgl. z. B. Holst u. Oosterhuis, Physica, **1**, 78, 1921). Es bedürfte einer besonderen Untersuchung, inwiefern für diese Verhältnisse den folgenden ähnliche Betrachtungen anwendbar sind.

1) Vgl. Günther-Schulze, Zeitschr. f. Physik **30**, 175, 1924.

2) Kossel, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **18**, 326, 1921; Langmuir u. Mott-Smith, Gen. Electr. Rev. **27**, Hefte 7, 8, 9, 11, 12, 1924; Dällenbach, Gerecke u. Stoll, Phys. Zeitschr. **26**, 10, 1925.

3) Gehlhoff, Leitung und Ionisierung in verdünnten Gasen. Graetz, Handb. d. Elektr. u. d. Magn. **3**, 862, 1925; Gehrcke, Erscheinungen der Glimmentladung an den Elektroden. Marx, Handb. d. Radiologie **3**, 205 u. 206, 1916.

nicht mehr möglich, sei es, daß das Glimmlicht sich zusammenzog auf eine Teilfläche der Kathode, wie das ohne besondere Vorsichtsmaßregeln meistens beobachtet wird, oder daß im Telephon hörbare Schwingungen eintraten. Ich kann nicht mit Sicherheit behaupten, daß bei unsern Messungen auf dem fallenden Ast NG der Charakteristik keine Schwingungen da waren. Der Nachweis müßte mit einer empfindlicheren Methode erbracht werden, als sie das Telephon

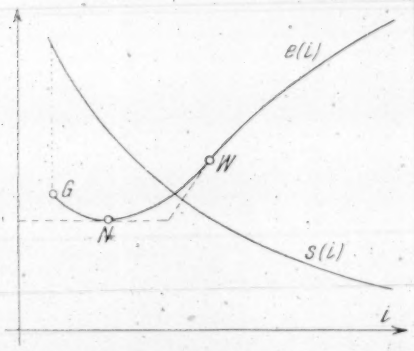


Fig. 1.

darstellt. Immerhin werde ich demnächst in einer theoretischen Mitteilung zeigen können, daß bei Verwenden eines besonderen Dämpfungszweiges parallel zur Entladeröhre, wie wir ihn benutzt haben, stabile Meßpunkte auch auf einer fallenden Charakteristik möglich sind. Die vorliegende Arbeit nimmt jedenfalls an, daß der normale Kathodenfall ein Minimum der Stromspannungscharakteristik darstellt und daß das Kathodengefälle für kleinere Stromdichten bei dauernd voller Bedeckung der Kathoden wieder ansteigt und für $i = 0$ den Wert des Funkenpotentials erreicht.

Die Breite s der Ionisationszone nahm im ganzen der Messung zugänglichen Bereich mit wachsendem Strom monoton ab und war stets größer als die Breite des Crookeschen Dunkelraums.

Zu jedem Werte von p gehören so zwei Charakteristiken $e(i)$ und $s(i)$, die unter sich zusammenhängen durch eine dritte Charakteristik $e(s)$. Es handelt sich im Folgenden einmal um die Beziehung dieser Charakteristiken zum Verlauf $V(s)$ des Funkenpotentials in Abhängigkeit vom Plattenabstand s und dann um die Veränderung aller drei Charakteristiken $e(i)$, $s(i)$ und $e(s)$ mit dem Gasdruck.

1. Die verallgemeinerte Entladebedingung. Es ist für die Darstellung zweckmäßig, zunächst einige Punkte der Townsendschen Theorie des Funkenpotentials zu rekapitulieren. Zwischen zwei im Abstande s und in einem Gas vom Druck p befindlichen parallelen Platten bestehe ein homogenes elektrisches Feld. Aus der Kathode bei $x = 0$ sollen Elektronen (die sog. Primärelektronen) mit der Stromdichte $N(0)$ austreten. Infolge Stoßionisation wird der Elektronenstrom $N(x)$ im Querschnitt x mit wachsendem x von $N(0)$ bis zum Werte des Gesamtstromes $N(s) = i$ exponentiell anwachsen, wie die Fig. 2 zeigt. Der positive Ionenstrom

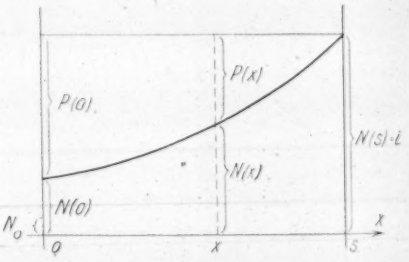


Fig. 2.

$P(x)$ ist in jedem Querschnitte gleich $i - N(x)$. Ist der Gasdruck p so groß, daß die freie Weglänge sehr klein ist gegenüber dem Plattenabstande s und spielen Verluste an Ladungsteilchen durch Rekombination oder Diffusion keine Rolle, so kann man für die Stromzunahme $dN(x)$ über dx nach Townsend den Ansatz machen

$$dN(x) = N(x) \cdot \alpha dx + P(x) \cdot \beta dx,$$

wo α und β die bekannten von Gasdruck und Feldstärke abhängigen Townsendschen Ionisierungszahlen bedeuten. Eliminiert man $P(x)$, so resultiert für $N(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dN(x)}{dx} = (\alpha - \beta) N(x) + \beta i. \qquad (1)$$

Ihre Lösung ist bekanntlich

$$N(x) = N(0) \frac{\alpha e^{(\alpha-\beta)x} - \beta e^{(\alpha-\beta)s}}{\alpha - \beta e^{(\alpha-\beta)s}}. \qquad (2)$$

Der Primärelektronenstrom $N(0) = N_0 + \gamma P(0)$ setze sich zusammen aus einem durch ultraviolette Strahlung ausgelösten Anteil N_0 und einer Stromdichte $\gamma P(0)$ hervorgerufen durch die an der Kathode ankommende Stromdichte $P(0)$ der positiven Ionen. γ ist offenbar eine von Gasdruck, Gasart, Feldstärke und Kathodenmaterial abhängige Konstante, welche für die Elektronenauslösung aus dem Kathodenmaterial

charakteristisch ist. Mit diesem Ansatz für $N(o)$ berechnet sich vermöge $P(o) = i - N(o)$ und Gleichung (2) $N(x)$ zu

$$N(x) = N_0 \frac{\alpha e^{(\alpha-\beta)x} - \beta e^{(\alpha-\beta)s}}{(1+\gamma)\alpha - (\beta + \alpha\gamma) e^{(\alpha-\beta)s}} \quad (3)$$

Da $i = N(s)$ und $P(x) = i - N(x)$ sind, so ist damit die Frage nach den Ionen- und Elektronenstromdichten beantwortet. Bekanntlich gilt $\alpha = pA$ und $\beta = pB$, wo A und B den Gasdruck p nur insofern noch enthalten, als sie für eine bestimmte Gasart allein abhängen vom Quotienten aus Feldstärke und Gasdruck, oder, was dasselbe besagt, von der elektrischen Spannung φ über eine mittlere freie Weglänge in Richtung des Feldes. Man überlegt sich leicht, daß auf die Größe γ außer der Gasart und dem Kathodenmaterial ebenfalls die Spannung φ allein noch von Einfluß sein kann. $N(x)$ läßt sich daher schreiben

$$N(x) = N_0 \frac{A e^{(A-B)(ps)\left(\frac{x}{s}\right)} - B e^{(A-B)(ps)}}{(1+\gamma)A - (B + A\gamma) e^{(A-B)(ps)}} \quad (4)$$

Ohne damit etwas auszusprechen, was nicht bekannt wäre, wollen wir doch für die weiteren Überlegungen den folgenden Satz festhalten:

I. In der Gasstrecke zwischen zwei parallelen Platten im Abstande s bei relativ hohem Gasdruck p (Weglänge klein gegenüber s) und in einem homogenen elektrischen Felde sind die Elektronen und Ionenströme in einem beliebigen Querschnitt proportional dem aus der Kathode fremd ausgelösten Primärelektronenstrom N_0 und hängen außerdem, solange N_0 und der resultierende Strom i klein bleiben, Feldverzerrung durch Raumladungen und Verluste an Teilchen durch Rekombination und Diffusion also keine Rolle spielen, allein ab

1. von Gasart und Kathodenmaterial,
2. von der im Verhältnis zum Plattenabstand reduzierten Koordinate x/s des betrachteten Querschnittes,
3. vom Produkt (ps) aus Gasdruck und Plattenabstand,
4. von der Spannung φ über eine mittlere freie Weglänge in Richtung des Feldes.

Wächst die Spannung φ, so nimmt der Nenner $D = (1+\gamma)A - (B + \gamma A) e^{(A-B)(ps)}$ bekanntlich ab und wird für den zum Funkenpotential gehörenden Wert von φ zu Null. Wenn in den Voraussetzungen der Gleichung (4) sich nichts ändern würde, so müßten die Ströme bei endlichem N_0 über alle Grenzen wachsen. Für die Theorie des Funkenpotentials interessiert lediglich die Gleichung $D = o$ und die Ströme, die auftreten würden, verdienen in jenem Zusammenhang keine besondere Beachtung. Für unsere Zwecke müssen aber gerade diese Ströme bei $D = o$ näher diskutiert werden. Nehmen wir an, daß tatsächlich in den Grundlagen der Gleichung (4) sich nichts ändere und daß sie auch für $D = o$ die Stromverteilung richtig angebe. Was wäre dazu nötig? Offenbar, daß die Gasdichte sich nicht ändere, etwa infolge Erwärmung, was trivial ist, ferner, daß die Größen A, B und γ ihre Anwendbarkeit und auch ihre Werte beibehalten. Das ist nur dann der Fall, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Es gehen im Gas keine Ladungsteilchen verloren durch Rekombination und Diffusion.
2. Die Ionisierbarkeit des Gases ist unabhängig vom Stromdurchgang, Effekte wie mehrfache Stöße oder Anregung durch Temperatur und Strahlung spielen also keine Rolle.
3. Die Feldverteilung ändert sich nicht. Trotz der endlichen, in der Grenze unendlich großen Ströme treten keine Raumladungen auf, die das homogene Feld verzerren würden.

Einmal angenommen, diese Voraussetzungen seien erfüllt, so müßte es — abgesehen von Stabilitätsfragen — nach Gleichung (4) möglich sein, jeden beliebigen endlichen Strom i durch die Gasstrecke selbständig aufrecht zu erhalten und anzugeben, welches dabei in jedem Querschnitte die Ionen- und Elektronenströme sind. Man brauchte nur gemeinsam mit D auch den Fremdstrom N_0 gegen Null konvergieren zu lassen, derart, daß der Quotient $\frac{N_0}{D}$ sich dem endlichen, aber beliebigen Werte W nähert. Es werden dann nach Gleichung (4) der selbständige Strom

$$i = N(s) = W(A - B) e^{(A-B)(ps)}$$

und der mit ihm verknüpfte Elektronenstrom im Querschnitte x

$$N(x) = i \frac{A e^{(A-B)(ps)\left(\frac{x}{s}\right)} - B e^{(A-B)(ps)}}{(A-B) e^{(A-B)(ps)}}. \quad (5)$$

In Worten:

II. Durch eine Gasstrecke zwischen zwei parallelen Platten im Abstande s bei relativ hohem Gasdrucke p (Weglänge klein gegenüber s) und bei homogener elektrischer Feldstärke, die gerade der Bedingung für Funkenpotential entspricht, ist jeder beliebige endliche selbständige Strom i möglich, der die obigen drei Voraussetzungen erfüllt.

Die Elektronen- und Ionenstromdichte in einem beliebigen Querschnitte x berechnet sich dann nach Gleichung (5), ist proportional diesem selbständigen Strome i und hängt außerdem allein ab

1. von der Gasart, nicht aber vom Kathodenmaterial,
2. von der im Verhältnis des Plattenabstandes s reduzierten Koordinate x/s des betrachteten Querschnittes,
3. vom Produkt (ps) aus Gasdruck und Plattenabstand, denn die Spannung φ über eine mittlere freie Weglänge in Richtung des Feldes ist, vermöge der Bedingung für Funkenpotential, aus (ps) berechenbar.

Für eine phänomenologische Theorie der Glimmentladung ist von Bedeutung, daß diese Überlegungen, insbesondere die zwei Sätze, eine Verallgemeinerung zulassen auf den ganzen Bereich des Produktes (ps) und auch auf Fälle mit inhomogener Feldverteilung. Ich habe kürzlich zeigen können[1]), in welcher Weise eine solche Verallgemeinerung möglich ist, und möchte jetzt aus der betreffenden Arbeit einige Resultate übernehmen, die für die weitere Behandlung des hier interessierenden Gegenstandes nützlich sein werden.

Zwischen den zwei im Abstande s befindlichen parallelen Platten sei die Feldverteilung inhomogen. Die Feldstärke soll allerdings noch immer in jedem Punkte zu den Platten senkrecht stehen, aber sie sei nun nicht mehr konstant, sondern eine als bekannt vorausgesetzte Funktion der Koordinate x. Vorausgesetzt, daß die Weglänge klein ist gegen den Abstand s und gegen Koordinatendifferenzen, über welche das Feld sich bereits merklich ändert, hat Townsend auch für diesen verallgemeinerten Fall der inhomogenen Feldverteilung die Ströme und die Bedingung für selbständige Entladung aus der Differentialgleichung (1) berechnet, indem er bei der Integration berücksichtigt, daß α und β nun nicht mehr als konstante Größen, sondern wegen der Veränderlichkeit der Feldstärke ebenfalls als Funktionen von x zu behandeln sind. Geht man einen Schritt weiter, indem man auch die einschränkende Annahme über die Kleinheit der Weglänge fallen läßt und versucht die Theorie auszudehnen auf den ganzen Bereich des Produktes (ps), so tritt zur Berechnung der Ströme im Querschnitt x an Stelle der Differentialgleichung (1) die folgende Fredholmsche Integralgleichung für die unbekannte Funktion $\frac{dN(x)}{dx}$:

$$\frac{dN(x)}{dx} = N_0\alpha(x,0) + \int_0^x K(x,\xi)\frac{dN(\xi)}{d\xi}d\xi. \quad (6)$$

Sie hat den Kern

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \alpha(x,0)\gamma(\xi) + \alpha(x,\xi) & \xi < x \\ \alpha(x,0)\gamma(x) & \text{für } \xi = x \\ \alpha(x,0)\gamma(\xi) + \beta(x,\xi) & \xi > x \end{cases}$$

Die Funktionen $\alpha(x,\xi)$; $\beta(x,\xi)$; $\gamma(x)$ sind Verallgemeinerungen der Townsendschen Größen α, β, γ und sie gehen für kleine Werte der Weglänge in diese über. $\alpha(x,\xi)$ und $\beta(x,\xi)$ hängen allein ab von der Feldverteilung, der Gasart und der Gasdichte. Sie sind prinzipiell berechenbar, sobald man die Stoßgesetze und Anregungsfunktionen des Gases kennt. Auf $\gamma(x)$ ist außerdem noch das Kathodenmaterial von Einfluß. Die einzigen Annahmen von Belang, die zu diesem verallgemeinerten Ansatze gemacht werden müssen, sind, daß keine Ladungsteilchen durch Diffusion und Rekombination verloren gehen, und daß sowohl die Elektronen und positiven Ionen im Momente ihrer Befreiung aus Gasmolekülen, wie die Primärelektronen beim Austritt aus der Kathode vernachlässigbar kleine Anfangsgeschwindigkeiten haben. Die Lösung $\frac{dN(x)}{dx}$ der Fredholmschen Integralgleichung kann angegeben werden und aus ihr folgt durch Quadratur $N(x)$ selbst.

Die Townsendschen Zahlen α und β ließen sich darstellen als $\alpha = pA$ und $\beta = pB$, wo die Größen A und B den Gasdruck nur insofern noch enthalten, als sie für eine bestimmte Gasart allein abhängen von der elektrischen Spannung φ über eine mittlere freie Weglänge in Richtung des Feldes. In analoger Weise gilt

$$\alpha(x,\xi) = pA\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right)$$

und

$$\beta(x,\xi) = pB\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right),$$

wo für eine bestimmte Gasart die Funktionen

$$A\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right) \text{ und } B\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right)$$

den Gasdruck und den Plattenabstand nur insofern noch enthalten, als sie außer von den reduzierten Koordinaten $\frac{x}{s}$ und $\frac{\xi}{s}$ allein abhängen von der Potentialverteilung über die Gasstrecke ausgemessen mit der mittleren freien Weglänge als Streckeneinheit. Wird z. B. der Plattenabstand s auf $s' = \frac{1}{m}s$ reduziert, der Gasdruck aber auf $p' = mp$ erhöht, und stimmt das elektrische Potential im Punkte $x' = \frac{1}{m}x$ überein mit dem Potential bei x vor der Transformation,

1) Dällenbach, Eine Verallgemeinerung der Townsendschen Theorie des Funkenpotentials. Phys. Zeitschr. 26, 407, 1925.

so bleibt offenbar durch eine solche Transformation „die Potentialverteilung über die Gasstrecke ausgemessen mit der mittleren freien Weglänge als Streckeneinheit" völlig ungeändert. Bezeichnet man die so definierte Potentialverteilung symbolisch mit Φ, so hängen also bei einer bestimmten Gasart die Funktionen

$$A\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right) \text{ und } B\left(\frac{x}{s}, \frac{\xi}{s}\right)$$

außer von $\frac{x}{s}$ und $\frac{\xi}{s}$ allein noch ab von dieser Potentialverteilung Φ. Für ein bestimmtes Kathodenmaterial gilt sinngemäß übertragen dasselbe von der Funktion $\gamma(x)$.

Wenn man diese Tatsachen berücksichtigt, so läßt sich die Lösung der Integralgleichung (6) auf die zu Gleichung (4) entsprechende Form bringen

$$N(x) = \frac{N_0}{D\{ps, \Phi\}} F\left\{\frac{x}{s}, ps, \Phi\right\}. \quad (7)$$

Daran sind $D\{ps, \Phi\}$ und $F\left\{\frac{x}{s}, ps, \Phi\right\}$ bei bekannter Kernfunktion durchaus angebbare Funktionen, die uns aber hier nicht näher interessieren. Es gilt also folgende Verallgemeinerung von Satz 1:

Ia: In der Gasstrecke zwischen zwei parallelen Platten im Abstand s sind bei einem beliebigen Gasdrucke p und auch bei inhomogener Feldverteilung die Ionen- und Elektronenströme in einem beliebigen Querschnitt x proportional dem aus der Kathode fremd ausgelösten Primärelektronenstrom N_0 und hängen außerdem, solange N_0 und der resultierende Strom i klein bleiben, Feldverzerrung durch Raumladungen und Verluste an Teilchen durch Rekombination und Diffusion also keine Rolle spielen, allein ab

1. von Gasart und Kathodenmaterial,
2. von der im Verhältniss des Plattenabstandes s reduzierten Koordinate x/s des betrachteten Querschnittes,
3. vom Produkte (ps) aus Gasdruck und Plattenabstand,
4. von der oben näher definierten Potentialverteilung Φ über die Gasstrecke.

Auch hier gilt analog wie bei homogenem Feld, daß mit wachsendem Φ der Nenner $D\{\cdots\}$ abnimmt und daß

$$D\{ps, \Phi\} = 0 \quad (8)$$

die verallgemeinerte Bedingung für selbständige Entladung darstellt. Läßt man mit $D\{\cdots\}$ auch N_0 geeignet gegen Null konvergieren und bleiben trotz der endlichen Ströme wie oben dieselben drei Voraussetzungen bezüglich Verluste an Teilchen, Ionisierbarkeit des Gases und Feldverzerrung durch Raumladungen erfüllt, so kann offenbar dem selbständigen Gesamtstrom durch die Gasstrecke

$$i = \frac{N_0}{D\{ps, \Phi\}} F\{1, ps, \Phi\}$$

jeder beliebige endliche Wert erteilt werden und immer ist bei ihm die Verteilung der Ionen- und Elektronenströme bekannt und gegeben durch

$$N(x) = i \frac{F\left\{\frac{x}{s}, ps, \Phi\right\}}{F\{1, ps, \Phi\}}, \quad (9)$$

entsprechend Formel (5) bei homogenem Feld. Es gilt daher der verallgemeinerte Satz:

IIa. Durch eine Gasstrecke zwischen zwei parallelen Platten im Abstand s wäre bei beliebigem Gasdrucke p und auch bei inhomogener Feldverteilung, die aber gerade die Bedingung (8) für selbständige Entladung erfüllt, jeder beliebige, endliche, selbständige Strom i möglich, falls er die obigen drei Voraussetzungen erfüllt.

Die Elektronen- und Ionenstromdichte in einem beliebigen Querschnitte x berechnet sich dann nach Gleichung (9), ist proportional diesem selbständigen Strome i, und hängt außerdem allein ab

1. von der Gasart, nicht aber vom Kathodenmaterial,
2. von der im Verhältnis des Plattenabstandes s reduzierten Koordinate x/s des betrachteten Querschnittes, und
3. vom Produkt (ps) aus Gasdruck und Plattenabstand, und der Potentialverteilung Φ, die aber vermöge der Bedingung (8) für selbständige Entladung mit (ps) verknüpft ist.

2. Bemerkung zu einer künftigen Berechnung der Strom-Spannungscharakteristik der Glimmentladung. Die Überlegungen des vorausgehenden Abschnittes erlauben eine Anwendung auf die einleitend erwähnten Charakteristiken der Glimmentladung. Bei gegebenem Gasdruck p und für einen bestimmten Punkt der Strom-Spannungscharakteristik $e(i)$ Fig. 1 bewirken die mit dem Stromdurchgang i verknüpften Raumladungen eine ganz bestimmte Potentialverteilung $\varphi(x)$ des Kathodengefälles e über die Breite s der Ionisationszone. Es stellte sich nun offenbar die Aufgabe, zu gegebenen Werten von i und p die Breite s, das Kathodengefälle e und seine Verteilung $\varphi(x)$ über s zu berechnen. Wenn auch vorläufig eine direkte Lösung dieses Problems nicht möglich scheint, so ist es doch ein-

fach, die Zusammenhänge, die man bei einer solchen Lösung berücksichtigen müßte, und die Schwierigkeiten, denen man begegnen würde, näher zu beleuchten. Es wird leicht sein, indem man sich z. B. auf Versuche stützt, zu einer bestimmten Stromdichte i Werte s_1 und e_1 für die Ionisationszonenbreite und das Kathodengefälle schätzungsweise anzunehmen, die bereits in der Nähe der wahren Werte s und e liegen. Auch darüber wird eine einigermaßen zutreffende Annahme möglich sein, wie beim Gefälle e_1, das Potential $\varphi_1(x)$ und damit die Feldstärke $\mathfrak{e}_1(x)$ sich über s_1 verteilen. Die Figur 3 gibt ein Bei-

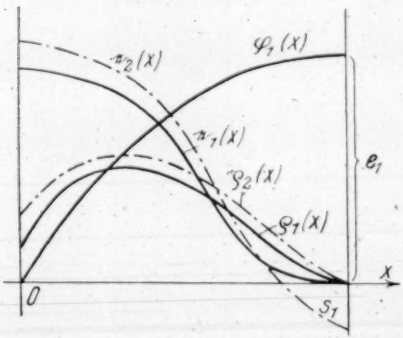


Fig. 3.

spiel für eine derartige Annahme s_1, e_1, $\varphi_1(x)$, $\mathfrak{e}_1(x)$. Zum Verlauf von $\mathfrak{e}_1(x)$ gehört eine bestimmte Verteilung $\varrho_1(x)$ der Raumladungsdichte, die ebenfalls im Bild eingetragen ist. In dem Gedankenexperiment, das nun folgt, sei es möglich, diese gedachte Feldverteilung $\mathfrak{e}_1(x)$ über s_1 aufrecht zu erhalten, was für Ströme auch durch die Gasstrecke fließen mögen. Mit anderen Worten, die Ströme, die wir fließen lassen, sollen keine zusätzlichen wahren Raumladungen hervorrufen, welche die einmal angenommenen Feldverhältnisse ändern könnten. Lösen wir nun durch ultraviolette Belichtung einen Fremdelektronenstrom N_0 aus der Kathode aus, so sind nach Formel (7) die Elektronen- und Ionenströme in jedem Querschnitt berechenbar. Die erste Frage, die jetzt interessiert, ist die nach dem Nenner $D\{\cdots\}$. Ist er Null oder von Null verschieden? Falls $D\{\cdots\}$ einen endlichen Wert hat, so wird es möglich sein, die angenommene Feldverteilung $\mathfrak{e}_1(x)$ und damit auch e_1, $\varphi_1(x)$, $\varrho_1(x)$ derart proportional zu verändern, daß die Entladebedingung (8) gerade erfüllt wird. Angenommen, das sei geschehen. Für einen kleinen selbständigen Strom ist dann die Verteilung der Ionen- und Elektronenströme über s_1 bestimmt durch Formel (9). Macht man diesen selbständigen Strom gleich dem vorgegebenen Glimmstrom i, so kann durch ihn vermöge von Effekten, wie mehrfache Stöße oder Anregung durch Temperatur, Strahlung usw. die Ionisierbarkeit des Gases in einer Weise verändert werden, daß $D\{\cdots\}$ nun nicht mehr verschwindet. Es ist aber ohne Zweifel möglich, die angenommene Feldverteilung $\mathfrak{e}_1(x)$ wiederum derart anzupassen, daß die Bedingung (8) für selbständige Entladung gerade bei Durchgang des vorgegebenen Glimmstromes i erfüllt wird. Nötig ist dazu, daß man kennt, in welcher Weise die Ionisierbarkeit des Gases vom Stromdurchgang abhängt und daß Verluste an Ladungsteilchen durch Rekombination und Diffusion keine Rolle spielen. Damit wäre folgendes erreicht: Wir haben jetzt eine Feldverteilung $\mathfrak{e}_1$, s_1, $\varphi_1(x)$, $\mathfrak{e}_1(x)$, $\varrho_1(x)$, welche schätzungsweise in der Nähe der wahren Lösung e, s, $\varphi(x)$, $\mathfrak{e}(x)$, $\varrho(x)$ liegt und welche durch die Gasstrecke eine selbständige Strömung zuläßt, die gerade mit dem vorgegebenen Glimmstrom i übereinstimmt, eine Feldverteilung, welche also gerade bei dem vorgegebenen Glimmstrom i die Bedingung für selbständige Entladung erfüllt. Nach Formel (9) können wir jetzt auch für den Strom i in jedem Querschnitt zwischen o und s_1 die Ionen- und Elektronenströme angeben.

Ein zweiter Schritt besteht darin, daß man aus Formel (9) erstens den Primärelektronenstrom $N(o)$ und dann die pro Zeiteinheit bei x über dx neu erzeugten positiven und negativen Ladungen $\frac{dN(x)}{dx}dx = -\frac{dP(x)}{dx}dx$ entnimmt. Nach Voraussetzung haben alle diese neu in Wirkung tretenden Ladungen vernachlässigbar kleine Anfangsgeschwindigkeiten. Unter dem Einflusse des hypothetischen Feldes $\mathfrak{e}_1(x)$ werden die Elektronen $N(o)$ die Strecke o bis s_1, die Elektronen $\frac{dN(x)}{dx}dx$ die Strecke x bis s_1 und die positiven Ionen $-\frac{dP(x)}{dx}dx$ die Strecke x bis o durchfallen. Dabei erleiden die Teilchen Zusammenstöße mit den Gasmolekülen. Die Kräfte, die das Feld $\mathfrak{e}_1(x)$ auf die Ladung ausübt, sind bekannt. Wenn wir auch die mittleren Geschwindigkeitsverluste und Ablenkungen genau kennen würden, welche die Teilchen bei den Zusammenstößen erfahren, so wäre es ferner möglich, die Bahnen und die Bewegungen auf diesen zu berechnen, welche die Teilchen im Mittel ausführen. Damit wäre dann auch die wahre Raumladungsdichte $\varrho_2(x)$ gegeben, welche der Stromdurchgang i unter dem Einfluß des

Feldes $\mathfrak{e}_1(x)$ in Wirklichkeit zur Folge hätte. Diese Raumladungsdichte $\varrho_2(x)$ hätte zusammen mit der äußeren Spannung e_1 eine Feldverteilung $\mathfrak{e}_2(x)$ zur Folge, die im allgemeinen von der angenommenen, hypothetischen $\mathfrak{e}_1(x)$ abweichen wird. Die Lösung bestünde nun offenbar darin, diese zwei Feldverteilungen, oder was dasselbe ist, die ursprünglich angenommene Dichteverteilung $\varrho_1(x)$ mit der schließlich sich ergebenden $\varrho_2(x)$ zur Deckung zu bringen. Die Berechnung von e und s bei gegebenem i und p erscheint hier als ein Variationsproblem. Bei vorgegebenen und festgehaltenen Werten von i und p müssen also s_1, e_1 und $\varphi_1(x)$ derart gefunden werden, daß $\varrho_1(x)$ mit $\varrho_2(x)$ identisch wird. Dann und nur dann stimmen s_1, e_1 und $\varphi_1(x)$ mit den wahren Werten s, e und $\varphi(x)$ überein. Man wird die allgemeine Lösung des Problems oder auch nur den Existenzbeweis einer eindeutigen Lösung selbst dann schuldig bleiben müssen, wenn die beteiligten Elementarvorgänge genügend bekannt wären. Dagegen kommt klar zum Ausdruck, daß es *drei und nur drei verschiedene Gruppen von Gesetzen sind, die ineinandergreifen und die Lösung bestimmen:*

1. *die von den Ionisationsvorgängen abhängige Bedingung (S) für selbständige Entladung $D\{ps, \Phi\} = 0$, eine Verallgemeinerung der Townsendschen Bedingung für das Funkenpotential,*
2. *die mechanischen Gleichungen für Bewegung der Ionen und Elektronen in einem widerstehenden Gas und unter dem Einfluß eines gegebenen inhomogenen Feldes,*
3. *die Feldgleichungen der Elektrostatik.*

3. Zusammenhang zwischen Funkenpotential und Kathodengefälle der Glimmentladung. Da die Charakteristik $e(i)$ im normalen Kathodengefälle ein ausgeprägtes Minimum hat, von dem im allgemeinen angenommen wird, daß es nahe übereinstimmt mit dem Minimumfunkenpotential, da ferner nach allem, was darüber gemessen wurde, $e(i)$ sowohl für große, wie für kleine Ströme zu hohen Spannungswerten ansteigt, und da endlich die Breite $s(i)$ der Ionisationszone mit wachsender Stromdichte monoton abnimmt, so folgt aus den Versuchen, daß e sich mit s qualitativ gleich ändert, wie das Funkenpotential $V(s)$ mit variablem Plattenabstande s. Von seiten der Theorie ist es die Betrachtung des vorausgehenden Abschnittes, welche ohne weiteres schließen läßt, daß $e(s)$ mit $V(s)$ sogar identisch sein müßte, wenn nur die folgenden drei Voraussetzungen (entsprechend Abschnitt 1) erfüllt wären:

1. Innerhalb der Ionisationszone der Glimmentladung gehen keine Ladungsteilchen durch Rekombination und Diffusion verloren.
2. Die Ionisierbarkeit des Gases vor der Kathode der Glimmentladung ist unabhängig vom Stromdurchgang, d. h. Effekte wie mehrfache Stöße oder Anregung durch Temperatur, Strahlung usw. spielen keine Rolle.
3. Die Feldverteilung über die Ionisationszone ist homogen.

Es ist sehr wahrscheinlich, wenn auch nicht sicher erwiesen, daß die Voraussetzungen 1 und 2 zutreffen. Die weiteren Überlegungen sollen sich denn auch auf diese Annahme stützen, deren Richtigkeit die Verhältnisse innerhalb der kathodischen Gebilde der Entladung in bemerkenswerter Weise unterscheiden würde von den Vorgängen in der positiven Säule. Im Gegensatz dazu kann die Voraussetzung (3) sicher nicht erfüllt sein, denn Messungen der Feldverteilung über den Dunkelraum[1]) zeigen, daß die Feldstärke stets an oder nahe an der Kathodenoberfläche ihren größten Wert hat, um von dort monoton abzunehmen, bis sie am Rande der Ionisationszone im negativen Glimmlicht nahezu den Wert Null erreicht. Die Betrachtung des vorangehenden Abschnittes führt daher zu demselben Ergebnis, wie die experimentellen Befunde. Die Charakteristik $e(s)$ wird einen bloß qualitativ gleichen Verlauf zeigen, wie das Funkenpotential $V(s)$.

Aus der Betrachtung des vorausgehenden Abschnittes läßt sich allerdings noch folgendes schließen: *Wenn die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt sind, so muß die Charakteristik $e(s)$ streng den gleichen Verlauf zeigen, wie das Funkenpotential an zwei Platten, zwischen denen irgendwie genau dieselbe Potentialverteilung hergestellt wird, wie sie bei der Glimmentladung über die Breite der Ionisationszone von selber sich einstellt.* Diese Bemerkung erlaubt nun wenigstens noch einige Schätzungen darüber anzustellen, in welcher Weise $e(s)$ und $V(s)$ voneinander abweichen. In der Fig. 4 sei I der wirkliche inhomogene Feldverlauf über s. Verglichen mit einem homogenen Felde bedeutet I eine Konzentration der Feldstärke nach der Kathodenoberfläche zu. Was das Funkenpotential anbetrifft, so wird I gegenüber einem homogenen Felde mit guter Annäherung eine gleiche Abweichung zeigen, wie das treppenförmig verlaufende Feld II, bei dem die Feldstärke zwischen o und s^* einen endlich großen, aber

1) W. Aston, Proc. Roy. Soc. **84**, 526, 1911; E. Brose, Ann. d. Phys. **58**, 731, 1919.

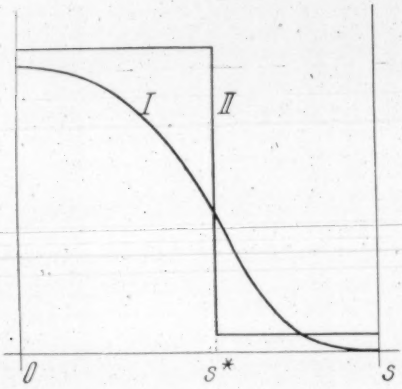


Fig. 4.

konstanten Wert haben möge, um dann zwischen s^* und s nahe Null zu bleiben. Für diesen Fall *II* läßt sich aber schätzungsweise angeben, in welcher Weise sein Funkenpotential $V_{II}(s)$ abweichen wird von $V(s)$.

Für Plattenabstände s, die groß sind gegenüber der freien Weglänge, wird $V_{II}(s)$ sich nicht ändern, wenn die Anodenplatte von s nach s^* vorgeschoben wird. Für große Breiten s der Ionisationszone gilt daher

$$e(s) = V_I(s) \sim V_{II}(s) = V(s^*).$$

Da für große Plattenabstände und $s^* < s$ auch $V(s^*) < V(s)$ ist, so muß für ganz kleine Glimmstromdichten, also in der Gegend unterhalb des normalen Kathodenfalls die Charakteristik $e(s)$ tiefer als die Charakteristik $V(s)$ des Funkenpotentials verlaufen (Fig. 5). Sobald die Plattenabstände s mit der freien Weglänge vergleichbar werden, so passieren Elektronen den Querschnitt s^* mit Geschwindigkeiten, die ausreichen, um im Raume zwischen s^* und s eine merkliche Ionisation hervorzurufen, die nicht übersehen werden darf. Die in diesem Raume gebildeten positiven Ionen wandern nämlich nach der Kathode, ionisieren im Gas zwischen s^* und o und ionisieren an der Kathodenplatte selbst. Sie haben also zur Folge, daß für abnehmende Werte von s vor und in der Gegend des Minimumfunkenpotentials die Charakteristik $V_{II}(s)$ unterhalb $V(s^*)$ verlaufen wird. *Man wird daher erwarten, daß der normale Kathodenfall in der Regel etwas niedriger gefunden wird, als das Minimumfunkenpotential.* Doch besteht ein Einfluß, auf den wir jetzt zu sprechen kommen, der diesem Sachverhalt wieder entgegenwirken kann.

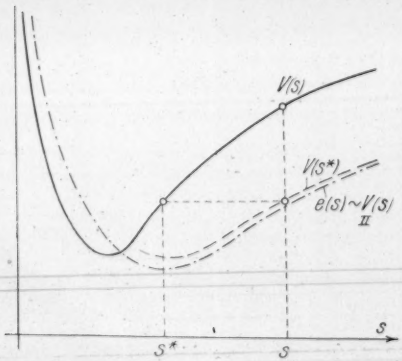


Fig. 5.

Für kleine Werte von s, d. h. gerade für den der Messung bequem zugänglichen ansteigenden Ast der Charakteristik $e(i)$ lassen sich entsprechende Aussagen nicht machen, und zwar aus folgendem Grunde: Durch die Konzentration des Feldes nach der Kathodenoberfläche zu erreichen die positiven Ionen, verglichen mit den Verhältnissen bei homogenem Felde, erst in größerer Nähe der Kathodenoberfläche höhere Geschwindigkeiten. Durch die inhomogene Feldverteilung nehmen also die wirksamen Zusammenstöße von positiven Ionen mit Gasmolekülen, d. h. die Zusammenstöße, welche Ionisation zur Folge haben, ab, während die wirksamen Zusammenstöße mit dem Kathodenmaterial zunehmen[1]). Man übersieht das am besten, wenn man den Grenzfall sich vorstellt, bei dem wesentlich das ganze Kathodengefälle in Form eines Kathodensprunges unmittelbar an der Kathodenoberfläche konzentriert sei, also der Fall $s^* \ll s$ und nahe Null. Die positiven Ionen würden dann im Gas keine Ionisation mehr hervorrufen und der ganze für selbständige Entladung unerläßliche Nachschub von Elektronen geschähe aus der Kathode allein. *Die inhomogene Feldverteilung bei Glimmentladung läßt daher den Einfluß des Kathodenmaterials stärker hervortreten als das beim Funkenpotential der Fall ist,* eine Tatsache die schon öfters experimentell festgestellt und ausgesprochen wurde. Es hängt nun offenbar ganz davon ab, wie die Ionisierung durch positive Ionen einerseits im Gase, anderseits am Kathodenmaterial

1) Bei dieser Argumentation ist vorausgesetzt, daß die Ionisierung durch positive Ionen vermöge ihrer Geschwindigkeit zustande kommt und mit letzterer wächst. Neuere noch unveröffentlichte Versuche von G. Hertz und Eindhoven lassen schließen, daß auch ganz langsame positive Ionen imstande sind Kathodenstrahlen auszulösen.

sich zueinander verhalten. Je nachdem wird das anormale Kathodengefälle auf dem ansteigenden Aste der Stromspannungscharakteristik oberhalb, in der Nähe oder unterhalb (wie z. B. bei Alkalimetallen zu erwarten) den der Breite s der Ionisationszone entsprechenden Funkenpotentialwerten verlaufen.

Dieser Einfluß ist es, der sich bis in die Gegend des normalen Kathodengefälles wird bemerkbar machen können. Bei Verhältnissen, wo die Elektronenauslösung aus dem Kathodenmaterial relativ zur Ionisierbarkeit des Gases schwer vor sich geht, ist denkbar, daß der normale Kathodenfall infolge davon nun doch höher liegt als das Minimumfunkenpotential.

4. Die freie und die behinderte Entladung. Bis jetzt haben wir nicht näher diskutiert, wie die Stromspannungscharakteristik $e(i)$ (Fig. 1) für Ströme unterhalb des Grenzpunktes G, bis zu dem Messungen möglich waren, verlaufen wird. Die Extrapolation des experimentell gefundenen Verlaufes und die im letzten Abschnitt diskutierten Zusammenhänge mit dem Funkenpotential lassen erwarten, daß mit abnehmendem Strome das Kathodengefälle e und die Breite s der Ionisationszone beide weiter zunehmen werden. Wenn die freie Ausbildung der kathodischen Gebilde nicht behindert werden soll, so wird es also nötig sein, die Anode um so weiter von der Kathode zu entfernen, je kleiner die Stromstärke ist. Geht man umgekehrt von einem sehr großen festgehaltenen Plattenabstand s_0 aus und steigert nach und nach die Spannung zwischen den Platten, so wird erst mit Erreichen des Funkenpotentials $V(s_0)$ ein selbständiger Strom i eintreten. Angenommen, daß es möglich wäre, i ganz allmählich vom Werte Null anwachsen zu lassen, so würden doch sofort positive Raumladungen in der Gasstrecke auftreten (wegen der vielmal größeren Beweglichkeit der Elektronen gegenüber den positiven Ionen), Raumladungen, welche das Feld in der Nähe der Kathode verstärken, in der Nähe der Anode aber schwächen müssen. Diese Konzentration des Feldes nach der Kathode zu wirkt aber bei dem gegenüber der Weglänge sehr großen Plattenabstand s_0 nach den Überlegungen des vorigen Abschnittes gleich wie eine Verringerung der Plattendistanz und diese Verringerung hat bei großen Plattenabständen, wie wir wissen, eine Abnahme der Entladespannung zur Folge. Mit dem allmählichen Anwachsen des Stromes i von Null geht also eine Abnahme der Entladespannung parallel: Die Charakteristik setzt bei $i = 0$ mit $V(s_0)$ ein und ist fallend. Mit wachsendem Strome i geht dieser Vorgang nun ohne Zweifel solange weiter, bis das Feld an der Anode derart geschwächt ist, daß in einer Zone, die der Anode anliegt, die Ionisation aufhört. Bei diesem Stromwerte löst sich die Ionisationszone, die bis da unabhängig vom Strome die Breite s_0 hatte, von der Anode ab und wird von nun an mit wachsender Stromstärke abnehmen bei gleichzeitiger Abnahme der Entladespannung, bis der Anschluß im Punkte G an das der Messung zugängliche Stück der Charakteristik $e(i)$ (Fig. 1) erreicht ist. Der Übergang von der *durch die Anodenplatte behinderten Entladung in die Entladung mit frei sich ausbildender kathodischer Ionisationszone* muß in der Charakteristik irgendwie, z. B. durch einen Knick, zum Ausdruck kommen. Den zwei Formen der Entladung wird nicht dieselbe Stromspannungscharakteristik entsprechen.

Was die Charakteristik $s(i)$ der freien Entladung anbetrifft, so werden wir nun zeigen, daß mit gegen Null abnehmendem Strome die Breite s gegen unendlich zunehmen muß, damit die immer schwächer werdenden Raumladungen imstande sind, das Feld auf den Raum zwischen der Kathode und der Grenze $x = s$ abzuschirmen. Das Gefälle $e(i)$ muß dann für $i = 0$ ebenfalls unendlich werden entsprechend dem Werte des Funkenpotentials für unendlich großen Plattenabstand s.

Wenn nämlich für $x = s$ die Feldstärke $e(x)$ verschwinden soll, so folgt durch partielle Integration für das Gefälle über s

$$e = \int_0^s e(x)\,dx = -\int_0^s x\,\frac{de(x)}{dx}\,dx.$$

Da die Raumladungsdichte $\varrho(x) = -\dfrac{de(x)}{dx}$ ist, so gilt auch

$$e = \int_0^s x\varrho(x)\,dx.$$

Führt man die neue Variable $u = \dfrac{x}{s}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{e}{s^2} = \frac{e_m}{s} = \int_0^1 u\varrho(u)\,du.$$

Mit abnehmendem Strome nimmt auch die Raumladungsdichte ab und das Integral nähert sich dem Werte Null. Es gilt also

$$\lim_{i=0}\left(\frac{e_m}{s}\right) = 0. \qquad (10)$$

$e_m = \dfrac{e}{s}$ ist der Mittelwert des Feldes über s.

Für homogene Feldverteilung ist bekannt, daß

die zum Funkenpotential gehörende Feldstärke mit wachsendem Plattenabstande abnimmt, sodaß für diesen Fall mit $i = 0$ sowohl s wie e über alle Grenzen wachsen würden. In Wirklichkeit handelt es sich aber hier um ein inhomogenes, durch die Raumladungen verzerrtes Feld, und für dieses muß erst noch bewiesen werden, daß $\frac{e_m}{s}$ für wachsendes s sich ebenfalls dem Werte Null nähert. Für Abstände, die im Vergleich zur freien Weglänge groß sind, bleibt die Differentialgleichung (1) in Kraft. Ihre Integration, im Falle, daß α und β als Funktionen der Feldstärke auch von x abhängen, liefert einen gegenüber (3) verallgemeinerten Ausdruck für $N(x)$. Aus ihm findet man als Entladebedingung

$$(1+\gamma)\left|1-\int_0^s \beta e^{\int_x^s (\alpha-\beta)\,dx}\,dx\right| = \gamma e^{\int_0^s (\alpha-\beta)\,dx}.$$

Setzt man $\frac{\alpha}{\beta} = k$, so wird das Integral

$$-\int_0^s \beta e^{\int_x^s (\alpha-\beta)\,dx}\,dx = \int_0^s \frac{1}{k-1}\,d\left|e^{\int_x^s (\alpha-\beta)\,dx}\right|$$

und dafür kann gesetzt werden

$$= \frac{1}{k_m - 1}\left|1 - e^{\int_0^s (\alpha-\beta)\,dx}\right|,$$

wo k_m einen mittleren Wert des über 0 bis s allgemein veränderlichen Verhältnisses k bedeutet. Die Entladebedingung wird damit

$$\frac{(1+\gamma)k_m}{1-\gamma k_m} = e^{\int_0^s (\alpha-\beta)\,dx}.$$

Für Schlagweiten, die eine sehr große Zahl von Weglängen umfassen, stellen sich im Vakuum analoge Verhältnisse ein, wie sie für den Überschlag bei Atmosphärendruck die Regel sind. Für diese weiß man aber, daß die Spannung pro Weglänge klein ist gegenüber ihrem Werte in der Gegend des Minimumfunkenpotentials. Da nun α, β, γ bei gegebenem Drucke mit der Spannung pro Weglänge abnehmen, so versteht man, daß bei Atmosphärendruck der Faktor γ vernachlässigbar klein wird gegenüber eins, so daß also — was die Versuche ja auch ergeben — für die großen Schlagweiten der Einfluß des Kathodenmaterials völlig zurücktritt. Ferner erhält man bei Atmosphärendruck gute Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man von der Annahme ausgeht, es sei das Verhältnis $k = \frac{\alpha}{\beta}$ unabhängig von der Feldstärke e, was streng dann erfüllt ist, wenn die Gasstrecke keine Polaritätseffekte zeigt[1]).

In dem uns hier interessierenden Fall sehr großer Schlagweite in verdünnten Gasen wird man daher mit guter Annäherung dieselbe vereinfachte Entladebedingung wie bei Atmosphärendruck

$$k_m = e^{\int_0^s (\alpha-\beta)\,dx} \qquad (11)$$

annehmen dürfen. Mit wachsender Schlagweite wird sich die inhomogene Feldverteilung über s qualitativ nicht ändern. Wie klein auch die selbständige Strömung i werde, die Feldstärke wird von ihrem größten Werte in der Nähe der Kathode bei $x = 0$ monoton abklingen bis zum Werte Null bei $x = s$. Analog wie k mit e wird sich daher k_m mit der mittleren Feldstärke e_m nur wenig ändern, während α und β mit ihr monoton abnehmen müssen. Damit folgt aus der Entladebedingung (11), daß $e_m = \frac{e}{s}$ sich mit wachsendem s dem Werte Null nähern muß. $\frac{e}{s^2} = \frac{e_m}{s}$ geht also dann und nur dann gegen Null — wie das nach Formel (10) der Fall sein muß bei nach Null konvergierendem i —, wenn s über alle Grenzen wächst. Damit ist gezeigt, daß die Charakteristiken $s(i)$ und $e(i)$ für $i = 0$ beide nach unendlich gehen müssen, wie es in Fig. 6 dargestellt ist.

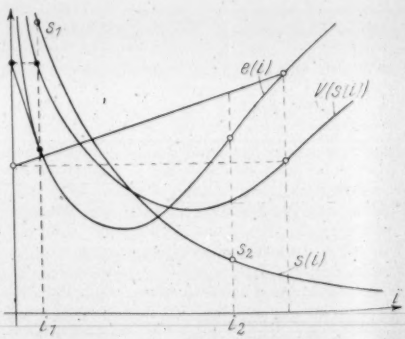


Fig. 6.

1) Vgl. Schumann, Die elektrische Durchbruchfeldstärke in Gasen. Springer, Berlin 1924. Schumann geht bei Rechnungen über Durchbruch in inhomogenen Feldern mit Erfolg stets von dieser Annahme aus.

Zu den Charakteristiken für behinderte Entladung lassen sich auch einige Überlegungen anstellen. $V(s)$ in der Figur sei das der Ionisationszonenbreite s entsprechende Funkenpotential. Nach den Ausführungen des vorausgehenden Abschnittes verläuft $V(s)$ für kleine Stromwerte bis in die Gegend des Minimumfunkenpotentials oberhalb des Kathodengefälles $e(s)$. Hält man die Anodenplatte im Abstande s_1 von der Kathode fest, so muß nach der Figur für Ströme $i < i_1$ die Charakteristik einer behinderten Entladung gelten, von der zwei Punkte bekannt sind. Sie beginnt nämlich im Punkte $i = i_1$ der freien Charakteristik und endet für $i = 0$ mit dem Werte des Funkenpotentials $V(s_1)$. Im übrigen ist ihr Verlauf unbekannt, und sie ist deshalb in der Figur als geradlinige Strecke eingezeichnet. In derselben Weise ergibt sich, von jedem anderen Punkte der freien Charakteristik aus, ein derartiges Stück einer behinderten Charakteristik, die stets bei $i = 0$ mit dem Werte des Funkenpotentials endet, welche der Breite der Ionisationszone im Ausgangspunkte entspricht. Der einen freien Charakteristik steht daher eine ganze Schar behinderter Charakteristiken gegenüber. Bereits die bloß geradlinig eingezogenen Charakteristiken geben Rechenschaft von der Beobachtung, die in der Einleitung zur Definition des Kathodengefälles diente. Nähert man bei festgehaltener Stromstärke, z. B. $i = i_2$ (siehe Figur), die Anode der Kathode, so erreicht bei einem Abstande s_2 die Spannung einen minimalen Wert e_2 und steigt bei weiterem Annähern der Anode rasch an. Der Zustandspunkt verschiebt sich auf der Ordinate bei $i = i_2$ zu immer höher verlaufenden behinderten Charakteristiken entsprechend der abnehmenden Plattendistanz.

Die experimentelle Aufnahme behinderter Charakteristiken wird Schwierigkeiten bieten. Bei kleinen Stromwerten verlaufen sie zu steil für stabile Meßpunkte, bei größeren Stromwerten geht die Entladung hauptsächlich vom Rand aus und kann die Verhältnisse im Innern der Gasstrecke stören. Mit zwei konzentrischen Zylinder- oder Kugelelektroden müßten am ehesten Messungen möglich sein.

5. Das Ähnlichkeitsgesetz. Bis jetzt wurde der Gasdruck unverändert festgehalten. Es fragt sich, wie die Verhältnisse, die in der Fig. 1 graphisch dargestellt sind, sich mit dem Drucke ändern. Skinner[1]) hat zuerst unter speziellen Annahmen über den Mechanismus in den kathodischen Gebilden der Glimmentladung nachgewiesen, daß die Schar der freien Stromspannungscharakteristiken $e(i)$ für alle möglichen Drucke p sich auf eine einzige Kurve $e\left(\frac{i}{p^2}\right)$ zurückführen läßt, wenn man die Spannung als Funktion der im Verhältnis $1/p^2$ reduzierten Stromdichte aufträgt. Holm[1]) behauptet die Gültigkeit desselben Ähnlichkeitsgesetzes, ohne sich spezielle Vorstellungen über den Mechanismus machen zu müssen. Es fragt sich, unter welchen Voraussetzungen man ein Ähnlichkeitsgesetz erwarten kann.

Wir gehen aus von irgendeiner freien oder behinderten Entladung beim Drucke p mit dem Kathodengefälle e, der Stromdichte i und der Breite s der Ionisationszone. Der Gasdruck werde nun erhöht auf $p' = mp$, die freie Weglänge reduziert sich also auf $\lambda' = \frac{1}{m}\lambda$. Im gleichen Verhältnis verkleinern wir auch die Breite s auf $s' = \frac{1}{m}s$, so daß die Anzahl der auf s entfallenden Weglängen sich nicht ändert. Wenn wir wieder annehmen, daß es möglich sei, die Feldverteilung willkürlich und unabhängig vom Stromdurchgang einzustellen und festzuhalten, so können wir dafür sorgen, daß im Querschnitt $x' = \frac{1}{m}x$ dasselbe Potential besteht, wie vor der Transformation im Querschnitte x. Es soll also für die Potentialverteilung gelten $\varphi'(x') = \varphi'\left(\frac{x}{m}\right) = \varphi(x)$. Das gesamte Spannungsgefälle über s' ist daher wie über s ungeändert gleich e. Wenn im Sinne der Voraussetzungen (1) und (2) von Abschnitt (1) keine Ladungsteilchen verloren gehen und die Ionisierbarkeit des Gases unabhängig vom Stromdurchgang ist, so muß die verallgemeinerte Entladebedingung (8) auch nach der Transformation erfüllt sein, denn durch die angegebene Transformation ändern sich weder $ps = p's'$, noch die Feldverteilung Φ über s bzw. s' bezogen auf die mittlere freie Weglänge λ bzw. λ' als Streckeneinheit. Die Verhältnisse nach der Transformation werden daher einem wirklichen Stromdurchgang durch die Gasstrecke entsprechen, sobald es möglich ist zu zeigen, daß die Potentialverteilung $\varphi'(x')$ vor der Kathode in gleicher Weise mit einer bestimmten Stromdichte i' und der von ihr hervorgebrachten Raumladungsdichte $\varrho'(x')$ verträglich ist, wie i und das zugehörige $\varrho(x)$ vor der Transformation mit ihrer Potentialverteilung $\varphi(x)$. Lassen wir probeweise einen Strom i' fließen, der aber

1) Skinner, Phys. Rev. **5**, 483 u. **6**, 158, 1915.

1) Holm, Phys. Zeitschr. **15**, 289, 1914 u. **17**, 402, 1916.

ganz unter dem Einflusse der festgehaltenen Potentialverteilung $\varphi'(x')$ diesen Feldverlauf in keiner Weise verzerren möge, so kann man von dieser Strömung i' behaupten, daß sie nach Formel (9) im Querschnitt x' einen Elektronen- bzw. Ionenstrom zur Folge hat, der sich zu i' gleich verhält, wie der Elektronen- bzw. Ionenstrom vor der Transformation im Querschnitte x zur Stromdichte i. Mit anderen Worten, die Stromverteilung im Querschnitte x' ist proportional i' und würde mit der Stromverteilung im Querschnitte x vor der Transformation übereinstimmen, falls $i' = i$ wäre. Ferner läßt sich von dieser Strömung i' sagen, daß die an ihr beteiligten Teilchen im Querschnitte x' genau dieselbe Geschwindigkeitsverteilung haben müssen, wie die entsprechenden am Strom i beteiligten Teilchen im Querschnitte x. Das folgt deswegen, weil durch die Transformation die Potentialdifferenzen über entsprechende Weglängen, welche von den Teilchen beschrieben werden, ungeändert bleiben. Die Bahnen der Teilchen transformieren sich daher im Verhältnis $1/m$ ähnlich und die Geschwindigkeitsverteilung längs jeder Bahn bleibt durch die Transformation ungeändert, vorausgesetzt allerdings, daß im einen, wie im andern Falle die Zusammenstöße der geladenen Teilchen mit den Gasmolekülen gleich verlaufen, was wir annehmen wollen und was so lange der Fall sein wird, als die für die Zusammenstöße verantwortlichen Wirkungsradien der Gas- und Ladungsteilchen gegenüber den Weglängen vernachlässigbar klein sind. Wenn nun in entsprechenden Querschnitten x und x' die Teilchengeschwindigkeiten gleich sind und die Teilchenströme sich verhalten, wie die Gesamtstromdichten i zu i', so müssen offenbar auch die Raumladungsdichten $\varrho(x)$ und $\varrho'(x')$ in diesen Querschnitten zueinander stehen wie i zu i'. Da nun nach Elektrostatik $\varrho = -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ sein muß, und wegen $\varphi'\left(\frac{x}{m}\right) = \varphi(x)$ die Relation besteht

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = m^2 \frac{d^2\varphi'(x')}{dx^2},$$

so ist auch $\frac{\varrho}{m^2} = -\frac{d^2\varphi'(x')}{dx^2}$. Stellt man weiter die Stromdichte i' derart ein, daß wegen $\frac{i}{i'} = \frac{\varrho(x)}{\varrho'(x')}$ die Raumladungsdichte $\varrho'(x')$ gerade gleich $\frac{1}{m^2}\varrho(x)$ wird, was der Fall ist für $\frac{i}{i'} = m^2$, so ist damit auch der Beziehung $\varrho' = -\frac{d^2\varphi'(x')}{dx^2}$ Genüge getan, d. h. die durch die Stromdichte i' erzeugten Raumladungen haben die Feldverteilung zur Folge, die sich gerade mit der transformierten $\varphi'(x)$ deckt. Die transformierte Feldverteilung $\varphi'(x)$ entspricht daher beim Gasdrucke $p' = mp$ einem wirklichen Stromdurchgang durch die Gasstrecke mit der Dichte $i' = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 i$. Es folgt also:

Das Kathodengefälle e einer freien Glimmentladung, seine Verteilung $\varphi\left(\frac{x}{s}\right)$ über die Breite s der Ionisationszone und das Produkt (ps) aus Gasdruck p und s hängen bei beliebigen Werten der Stromdichte i und des Gasdruckes p für eine bestimmte Gasart und ein bestimmtes Kathodenmaterial allein ab von $\frac{i}{p^2}$, der Stromdichte dividiert durch das Quadrat des Gasdruckes. Das Kathodengefälle e einer behinderten Glimmentladung und seine Verteilung über den Plattenabstand s hängen bei einer bestimmten Gasart und bestimmtem Kathodenmaterial außer vom Produkte ps ebenfalls allein ab von $\frac{i}{p^2}$.

Da für $i = 0$ das Kathodengefälle der behinderten Entladung mit dem Funkenpotential $V(ps)$ identisch ist, so enthält der zweite Teil des Satzes das Paschensche Gesetz als Spezialfall. Der Satz gilt natürlich nur für ebene Elektroden und im übrigen unter folgenden Voraussetzungen:

1. In der Gasstrecke spielen Diffusion und Rekombination keine Rolle;
2. die Ionisierbarkeit des Gases ist unabhängig vom Stromdurchgang;
3. die Wirkungsradien der Gas- und Ladungsteilchen sind gegenüber der mittleren freien Weglänge vernachlässigbar klein.

Als ein Spezialfall ergibt sich die oft behauptete Tatsache der Unabhängigkeit des normalen Kathodenfalles vom Druck, die irrtümlicherweise der Annahme Vorschub leistete, es handle sich beim normalen Kathodenfall um einen ausgezeichneten Punkt der Charakteristik, um eine für das Kathodenmaterial in besonderer Weise charakteristische Größe.

6. Schlußfolgerungen. Es scheint mir richtig, in dieser Arbeit auf die große Zahl der in der Literatur bekannt gewordenen Theorien, Ansichten und Tatsachen nicht näher eingegangen zu sein, als es dem Zwecke, die hier vorgetragene Auffassung möglichst einheitlich zur Darstellung zu bringen, dienlich sein konnte. Das empfahl sich insbesondere auch deswegen,

weil es neuere, zusammenfassende Berichte gibt, die erschöpfend über das Gebiet orientieren[1]). Die Arbeiten von Ragnar Holm indessen stehen der vorliegenden im Thema so nahe, daß sie nicht unerwähnt bleiben dürfen. Wenn ich mich auch seinen Argumentationen nicht immer und nicht vorbehaltlos anschließen kann, so glaube ich doch, daß die hier in Anwendung gekommene Betrachtungsweise unter anderm als ein Versuch gelten kann, Vorstellungen, die zuerst von Holm[2]) geäußert wurden, präziser zu formulieren und in einigen Punkten zu fördern.

Was die experimentelle Prüfung anbetrifft, so halte ich im Interesse einer konsequenten Weiterführung des Problems der Glimmentladung eine Abklärung der folgenden Fragen für besonders wünschenswert.

1. Mit welcher Genauigkeit gelten die Ähnlichkeitsgesetze? Diese Frage verdient deswegen an erster Stelle genannt zu werden, weil ihre Beantwortung zugleich Aufschluß darüber geben würde, ob in den kathodischen Gebilden der Glimmentladung die Ionisierbarkeit des Gases von der Stromdichte abhängt oder ob vielmehr im Gegensatz zu den Verhältnissen in der positiven Säule und in Übereinstimmung mit den vereinfachenden Annahmen, die wir hier gemacht haben, Effekte wie Rekombination und Diffusion oder Anregung durch mehrfache Stöße, durch Strahlung, Temperatur usw., welche alle die zu Ähnlichkeitsgesetzen führende Transformierbarkeit mit dem Druck ausschließen würden, keine Rolle spielen. Es müßten das Kathodengefälle $e(i)$ und die Breite $s(i)$ der Ionisationszone in Abhängigkeit von Stromdichte i und Gasdruck p gemessen werden, und zwar natürlich an einer Röhre mit gekühlter aus Schutzring und Elektrode bestehender Kathode und einer leicht und exakt parallel dazu verschiebbaren Anodenplatte. Die Konstruktion sollte den Erfahrungen über Lichtbogenzündungen Rechnung tragen, so daß Messungen bis zu höheren Spannungen möglich wären. Die Entladung selber kann Änderungen in der Gaszusammensetzung oder in der Beschaffenheit der Kathodenoberfläche zur Folge haben, welche die Reproduzierbarkeit der Messungen beeinträchtigen. Solche Abweichungen werden sich aber erst dann rein zeigen und eventuell vermeiden lassen, wenn alle andern Quellen von Störungen wie Deformation des Feldes durch Wandladungen, Inhomogenität der Gasdichte durch Erwärmungen ausgeschaltet sind.

2. In zweiter Linie wird es sich darum handeln, die Existenz des hier angenommenen fallenden Astes der $e(i)$ Charakteristik für Stromwerte unterhalb des normalen Kathodenfalls durch besondere Schaltungen, die stabile Meßpunkte zulassen, sicher zu stellen. Eine spätere Mitteilung wird demnächst eine solche Schaltung behandeln.

3. Nachweis der behinderten Entladung und Aufnahme einer zugehörenden Charakteristik und ihres Übergangs in diejenige der freien Entladung.

4. Der Vergleich der mit der Prüfung der Ähnlichkeitsgesetze zugleich festgestellten Abhängigkeit des Kathodengefälles $e(ps)$ vom Produkte ps mit dem Verlauf des Funkenpotentials $V(ps)$. Dabei würde sich zeigen, ob die qualitativen Beziehungen erfüllt sind, die man für verschiedene Kathodenmaterialien erwarten kann.

(Eingegangen 10. Juli 1925.)

1) Gehlhoff, Grätzsches Handb. d. Elektr. u. d. Magn. **3** (1923); Seeliger, Jahrbuch d. Rad. u. Elektr. Stücklen, Phys. Zeitschr.

2) Holm, Zur Theorie des Glimmstromes. Phys. Zeitschr. **15**, 241, 289, 782, 1914; **16**, 20, 70, 1915; **17**, 402, 1916; **19**, 548, 1918; **21**, 296, 1920.

Über die Zündspannung der Glimmentladung, zugleich Bemerkungen zu H. Geffckens Arbeit: „Zündspannung und Stabilität der Glimmentladung"[1]).

Von Giorgio Valle.

1. Zu den von H. Geffcken unter Verwendung einer sinnreichen Methode erzielten Ergebnissen möchte ich folgendes bemerken: H. Geffcken findet eine ausgesprochene Abhängigkeit der Zündspannung einer diskontinuierlichen Glimmentladung von der Frequenz und von dem Werte der parallel geschalteten Kapazität. Es handelt sich hauptsächlich um eine die Zündspannung erniedrigende Wirkung, welche H. Geffcken auf den Einfluß der von den vorhergehenden Partialentladungen herrührenden Restionisation zurückführen will. Diesbezüglich möchte ich erwähnen, daß ich schon im Jahre 1912[2]) bei diskontinuierlichen Entladungen eine besondere Erscheinung entdeckt habe, welche das Einsetzen des genannten Einflusses charakterisiert. Beim Erreichen eines bestimmten Zustandes geht nämlich die diskontinuierliche Entladung plötzlich in eine neue, ebenfalls diskontinuierliche Form über, welche eine sehr hohe Frequenz anzeigt und äußerlich mit einer kontinuierlichen Entladung leicht verwechselt werden kann (diskontinuierliche Entladung zweiter Art).

1) H. Geffcken, Physik. Zeitschr. **26**, 241, 1925.
2) G. Valle, Sitzungsber. Akad. Wien, Kl. IIa, **121**, 63, 1912.

Diese Form der Entladung setzt in dem Momente ein, wo, infolge einer Verminderung des Widerstandes oder der Kapazität, die Dauer des Zeitintervalles zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialentladungen (Ladungsperiode) kleiner wird als die Dauer der von einer Partialentladung bewirkten besonderen Ionisierung der Gasstrecke (Nachwirkungszeit[1]). Es steht damit in enger Beziehung das charakteristische Auftreten eines scharf begrenzten dunklen Raumes etwa in der Mitte der ungeschichteten positiven Säule. Diese Erscheinung hat mir sogar ermöglicht, den einer jeden Partialentladung folgenden sehr raschen Entionisierungsprozeß photographisch zu verfolgen[2]), sowie den auf denselben von einer Temperaturerhöhung der Gasstrecke ausgeübten Einfluß zu untersuchen[3]).

Für die zum Erreichen der Entionisierung nötigen Zeit (Dauer der Restionisation, Nachwirkungszeit) ergaben sich dabei Werte von der Größenordnung 10^{-3} sec; wie sie auch von Rumpf[4]) und, nach einer Angabe von R. Seeliger[5]), insbesondere von Klahre auf indirektem Wege gefunden wurden. Eine Erniedrigung der Zündspannung infolge der, von einer jeden Partialentladung hinterlassenen und rasch verschwindenden Restionisation kann folglich nur bei diskontinuierlichen Entladungen zweiter Art beobachtet werden. Ich habe auch tatsächlich diese Abhängigkeit nicht nur theoretisch vorausgesagt, sondern auch experimentell nachgewiesen[6]).

Bei diskontinuierlichen Entladungen erster Art, also in dem von H. Geffcken und auch von E. Mauz und R. Seeliger[7]) untersuchten Gebiete niedriger Frequenz (bis etwa zu 10^3 sec^{-1}) dürfte indessen die Zündspannung der Theorie nach von der Frequenz und der Kapazität ganz unabhängig sein. Wenn das nicht der Fall ist, wie es die erwähnten Autoren gezeigt haben, so muß diese Tatsache ausschließlich von jener quasistationären Einstellung der Verhältnisse in der Gasstrecke und an den Elektroden herrühren, welche R. Seeliger[1]) in einer besonderen Arbeit eingehend untersucht hat. Daß die bei hoher Stromstärke quasistationär sich einstellende höhere Gesamtionisierung der Gasstrecke dabei mitwirke, ist selbstverständlich. Eine spezifische Nachwirkung der einzelnen Partialentladungen muß indessen als Ursache der Erscheinung ganz ausgeschlossen werden. Diese Wirkung setzt erst dort ein, wo die genannten Autoren die Aufnahme der Zündcharakteristik abgebrochen haben.

2. H. Geffcken macht nun die Annahme, daß die dem „anomalen Reißpunkte" folgende Brenncharakteristik auch in ihrem anfänglich „fallenden" Teile einer wirklich kontinuierlichen Entladung entspreche. Ich möchte zuerst erwähnen, daß der Übergang zur kontinuierlichen Entladung, wie ich durch Versuche nachgewiesen habe[2]), immer stetig, wenn auch äußerst rasch erfolgt. Der Übergang von der diskontinuierlichen Entladung erster Art zu der diskontinuierlichen Entladung zweiter Art erfolgt dagegen sprungweise. Diesem letzten Übergange soll meines Erachtens nach der „anomale Reißpunkt" von Geffcken entsprechen. Der „normale Reißpunkt" darf dagegen als Übergangspunkt zur wirklich kontinuierlichen Entladung betrachtet werden.

H. Geffcken findet nämlich, daß die „Reißstromstärke" mit der parallel geschalteten Kapazität zunimmt; eine solche Abhängigkeit ist für den Übergang zur Entladung zweiter Art aus leicht zu erklärenden Gründen charakteristisch. Beim Übergang zur wirklich kontinuierlichen Entladung ist indessen die Stromstärke entweder (wie die elementare Theorie es verlangt) von der Kapazität ganz unabhängig oder sie nimmt mit abnehmender Kapazität bedeutend zu[3]). Letzteres erfolgt beim Übergange der Entladung zweiter Art in die kontinuierliche Entladung. Die nach dem „anomalen Reißpunkte" aufgenommene Brenncharakteristik ist andererseits durchaus „fallend"; eine solche „Stromspannungskurve"[4]) stellt ebenfalls eine eigentümliche

1) G. Valle, Sitzungsber. Akad. Wien, Kl. IIa, **123**, 1753, 1914.
2) G. Valle, Nuovo Cim. (VI), **23**, 343, 1922.
3) G. Valle, Nuovo Cim. (VI), **25**, 87, 1923.
4) E. Rumpf, Ann. d. Phys. **66**, 50, 1921. Rumpf bestimmt eigentlich die Halbwertzeit.
5) R. Seeliger, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **20**, 372, 1924.
6) G. Valle, Nuovo Cim. (VI), **23**, 387, 1922. Es wurde dabei eine dynamische Methode zur Bestimmung der Zündspannung verwendet; diese letzte wurde nämlich mit der (veränderlichen) elektromotorischen Kraft der Hochspannungsbatterie identifiziert, welche eben noch eine Entladung bestimmter Frequenz dauernd zu erhalten imstande war.
7) E. Mauz u. R. Seeliger, Physik. Zeitschr. **26**, 47, 1925.

1) R. Seeliger, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **20**, 353, 1924.
2) G. Valle, Sitzungsber. Akad. Wien, Kl. IIa, **123**, 1753, 1914.
3) G. Valle, Sitzungsber. Akad. Wien, Kl. IIa, **127**, 1355, 1918; Nuovo Cim. (VI), **18**, 165, 1919; **18**, 256, 1919.
4) Einer bei diskontinuierlichen Entladungen aufgenommenen Stromspannungskurve kann nämlich nie die Bedeutung einer charakteristischen Kurve beigelegt werden. Man vergleiche diesbezüglich die oben zitierten Arbeiten und E. Dubois, Annales de Physique **20**, 153, 1923, welcher, offenbar in Unkenntnis meiner Arbeiten, vieles von dem wiederholt, was ich schon 1918 in bezug auf die Bedeutung der Stromspannungskurven veröffentlicht habe.

Eigenschaft der diskontinuierlichen selbständigen Glimmentladung dar[1]). Das „normale", bei niedriger Frequenz sich einstellende „Reißen" führt dagegen stets zu dem „Knie", d. h. zum Anfangspunkte der „steigenden" Charakteristik, welche allein einer wirklich kontinuierlichen Entladung angehören kann. Beim „normalen Reißen" ist die „Reißstromstärke" von der Kapazität unabhängig.

In dem Gebiete zwischen dem „Reißpunkte" der Zündcharakteristik und dem „Kniepunkte" der Brenncharakteristik kann also die von Geffcken untersuchte Entladung nur als eine diskontinuierliche Entladung zweiter Art angesehen werden. In diesem Gebiete hätte die weitere Aufnahme der Zündcharakteristik die eigentliche Wirkung der Restionisation auf die Zündspannung erst ergeben. Diese Wirkung muß offenbar, wie auch Mauz und Seeliger zugeben, bei steigender Frequenz die Zündspannung bis zur theoretischen Minimalspannung herabsetzen. Eine weitere Begründung meiner Meinung ergibt sich nämlich aus der Tatsache, daß die „Reißzündspannung" stets bedeutend größer ist als die erwähnte Minimalspannung. In den von Mauz und Seeliger aufgenommenen Zündkurven scheint mir ebenfalls die Grenze angenähert eher bei der statischen Anfangsspannung als bei der Minimalspannung sich zu befinden. Das würde auch den Ergebnissen der elementaren Theorie entsprechen, welche die Hysteresis nicht berücksichtigt und infolgedessen zu einer der theoretischen Anfangsspannung gleichen, im ganzen Gebiete der diskontinuierlichen Entladung 1. Art konstanten Zündspannung führt. Die beobachteten Abweichungen von dieser Konstanz sind selbstverständlich als Hysteresiswirkungen im Sinne Seeligers anzusehen.

3. Ich möchte zuletzt bemerken, daß ich, um die besonderen Eigenschaften einer Entladungsröhre, trotz der Kompliziertheit der Vorgänge zu charakterisieren, im Jahre 1918[2]) den Vorschlag machte, zwei Kurven für jede Röhre zu bestimmen und anzugeben: die „statische Charakteristik" (welche nur bei streng kontinuierlicher Entladung aufgenommen werden darf) und die „kritische Kurve", welche die momentane Stromstärke mit dem entsprechenden Werte der Spannung verbindet, bei welcher die Stoßionisation, je nach der Richtung des Vorganges, eben einsetzen kann oder aufhören muß (Zündspannung = Löschspannung[1]). Man erreicht dadurch eine Darstellung sämtlicher Entladungsvorgänge, welche, im Gegenteil zu der, gewissermaßen analogen, für quasistatische Prozesse gedachten Darstellung von R. Seeliger[2]), auch für rasche Veränderungen verwendbar ist und insbesondere den Einfluß der Restionisation versinnlicht[3]). Diese Darstellungsmethode dürfte wohl auch zur besseren Charakterisierung der heute von vielen Fabriken konstruierten Glimmlampen Verwendung finden.

1) G. Valle, Sulla relazione esistente fra i vari fenomeni delle scariche elettriche, che si manifestano a differenti pressioni. Trieste, 1922, p. 15.

2) G. Valle, a. a. O.

1) Man vergleiche in bezug auf diese Identifizierung der Zündspannung mit der demselben Werte der momentanen Stromstärke entsprechenden Löschspannung die Arbeit Geffckens auf S. 250 und meine Anmerkung auf S. 234 der Arbeit im Nuovo Cim. (VI), 18, 1919.

2) R. Seeliger, a. a. O.

3) G. Valle, Nuovo Cim. (VI), 18, 2. u. 3. Teil, 1919.

Turin, Physikalisches Institut der Universität, 22. Juni 1925.

(Eingegangen 25. Juni 1925.)

Adsorption und Oberflächenenergie an der Trennungsgrenze verschiedener Phasen.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Boris Iliin.

Das Problem energetischer Wechselwirkungen zwischen sich berührenden Phasen wird von vielen Autoren untersucht und besonders hat Gibbs gezeigt, wie die Größe der Oberflächenenergie an der Trennungsgrenze verschiedener Phasen von den Zustandsparametern dieser Phasen abhängt.

Im speziellen Falle der Oberflächenspannung haben wir für verdünnte Phasen die bekannte Gibbs-Gleichung[1])

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial c} = \frac{1}{c} RT\Gamma, \qquad (1)$$

wo σ die Oberflächenspannung, c die Konzentration, T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante und Γ die Konzentrationsänderung an der Oberfläche sind.

Haben wir z. B. eine Lösung eines oberflächenaktiven Stoffes, so nimmt die Oberflächenspannung dieser Lösung mit der Zunahme ihrer Konzentration ab und diese Abnahme der Oberflächenspannung ist nach der Gibbs-Formel der relativen Stoffverdichtung (Adsorption) $\left(\frac{\Gamma}{c}\right)$ proportional.

Wenn wir nach Langmuir[2]) Γ durch die

1) Thermod. Studien 1892, S. 277.

2) Journ. Amer. Chem. Soc. 39, 1848, 1917.

Konzentration c ausdrücken, so erhalten wir das Integral der Gleichung (1):

$$\sigma(c) = \sigma(0) - b \log_{10}(ac + 1), \qquad (2)$$

d. h. die Gleichung von Szyszkowski, welche eine Abhängigkeit der Oberflächenspannung $\sigma(c)$ von der Lösungskonzentration c vorstellt.

Diese Gleichung[1]) wird durch die experimentell beobachtete Abnahme der Oberflächenspannung (Oberflächenenergie) an der Grenze von Lösung und Gas bestätigt.

Nach den Untersuchungen von Iredale[2]) drücken dieselben Gleichungen (1) und (2) die Abnahme der Oberflächenspannung auch an der Grenze von Hg und Dampf (Benzol, Alkohol u. a.) mit der Zunahme des Dampfdruckes aus.

Auf diese Weise sind die Gleichungen von Gibbs und Szyszkowski für die Abnahme der Oberflächenspannung sowohl an der Lösungsgrenze, wie auch an der Flüssigkeitsdampfgrenze gleich anwendbar, d. h. es ist durchaus gleichgültig, woher der aktive Stoff in die Grenzschicht gelangt, aus einer flüssigen Phase (für den Fall Lösung—Gas) oder aus einer gasförmigen Phase (für den Fall Flüssigkeit—Dampf).

Die oben gegebenen Resultate führen ganz natürlich zur Erweiterung des Anwendbarkeitsgebietes der Gleichungen von Gibbs und Szyszkowski auf alle möglichen Fälle einer Oberflächenenergie an der Trennungsgrenze verschiedener sich berührender Phasen.

Vorliegende Arbeit bezweckt erstens zu zeigen, daß auch die Oberflächenspannung $\sigma(c)$ an der Trennungsgrenze fester Körper—Gas in der Abhängigkeit vom Gasdrucke c durch dieselben Gleichungen (1) und (2) reguliert wird (und dabei erscheint dieses als Folge der früher von mir gegebenen Adsorptionsgesetze), und zweitens, wie sich die energetischen Verhältnisse an der Grenze einer Phasentrennung in der Abhängigkeit von der Oberflächenspannungsgröße jeder einzelnen Phase (hinsichtlich des Vakuums) zusammenfügen.

Theoretisches.

Die Formel von Szyszkowski stellt die Abhängigkeit der Oberflächenspannung σ von der Konzentration c vor. Unter Benutzung der Gibbs-Gleichung ist es unschwer, eine theoretische Abhängigkeit von σ von der Adsorptionskapazität Γ (die Menge eines adsorbierten Gases oder Dampfes) festzustellen. Dazu benutzen wir die von uns[1]) abgeleitete Gleichung für die Adsorptionsisotherme:

$$\Gamma = \Gamma_m (1 - e^{-\omega c}), \qquad (3)$$

wo Γ die Adsorptionskapazität, Γ_m ihr Maximalwert, ω eine Konstante sind.

Ist ω klein, so entwickeln wir $1 - e^{-\omega c}$ in eine Reihe und erhalten in der ersten Annäherung:

$$\Gamma = \Gamma_m \omega c \qquad (4)$$

und

$$dc = \frac{d\Gamma}{\Gamma_m \omega}. \qquad (5)$$

Die Einstellung von (4) und (5) in die Gibbs-Gleichung gibt uns:

$$-d\sigma = RT d\Gamma$$

oder nach Integration:

$$\sigma_0 - \sigma = RT\Gamma, \qquad (6)$$

d. h. wenn ω klein ist, so ändert sich die Oberflächenspannungsabnahme $\sigma_0 - \sigma$ proportional der Adsorptionskapazität Γ.

In der zweiten Annäherung ist:

$$\Gamma = \Gamma_m \omega c + \Gamma_m \frac{\omega^2 c^2}{2} \qquad (7)$$

und die Einstellung von (7) in die Gibbs-Gleichung gibt:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_m}{RT}\left(\sqrt{\frac{2\Gamma}{\Gamma_m} + 1} - \frac{2\Gamma}{\Gamma_m} - 1\right)\frac{d\sigma}{d\Gamma} \qquad (8)$$

oder nach Integration:

$$\sigma_0 - \sigma = RT\left\{\Gamma + \Gamma_m\sqrt{\frac{2\Gamma}{\Gamma_m} + 1} - \Gamma_m\right\}. \qquad (9)$$

Die letzte Beziehung ist, wenn ω klein ist, nahe der einfachen Proportionalität mit Γ.

Experimentelle Bestätigungen.

Die Oberflächenspannung eines festen Körpers σ läßt sich wie bekannt nicht unmittelbar messen, sondern wie wir schon gezeigt haben[2]), ist $\sigma(c)$ bei einem festen Körper mit der Adsorptionswärme Q eines gegebenen Gases durch folgende einfache Beziehung verbunden:

$$\sigma(0) = \sigma(c) + \frac{Q}{S_0},$$

wo $\sigma(0)$ und $\sigma(c)$ die entsprechenden Oberflächenspannungen eines festen Körpers im Vakuum und in einem gegebenen Gase bei einem Drucke C sind; S_0 die Oberfläche bei der Adsorption von 1 Mol Gas.

Zur Prüfung der Formel von Szyszkowski:

$$Q = b \log_{10}(ac + 1) \qquad (2')$$

1) Szyszkowski, Zeitschr. f. phys. Chem. **64**, 385, 1908; Langmuir, l. c.; Rehbinder, Zeitschr. f. phys. Chem. **111**, 447, 1924.

2) T. Iredale, Phil. Mag. **48**, 187, 1924; **49**, 603, 1925.

1) Iliin, Zeitschr. f. phys. Chem. **107**, 145, 1923.

2) Iliin, Zeitschr. f. phys. Chem. (im Druck).

an einem System „fester Körper, Gas oder Dampf" wurden die experimentellen Daten von A. Titoff[1]) und A. Lamb u. A. Coolidge[2]) über die Bestimmung der Adsorptionswärmen benutzt. Die unten angeführten Tabellen I, II, III, IV und Fig. 1 u. 2 zeigen uns, daß der Verlauf von Q in der Abhängigkeit von C dem theoretischen Gesetz (2') unterliegt. Es ist zu bemerken, daß die Arbeit von A. Lamb und A. Coolidge vorzügliche Daten über die Adsorptionswärme Q in ihrer Abhängigkeit von der Gaskonzentration im Adsorbens, aber nicht im äußeren Raum gibt; auch die Daten über die Abhängigkeit Q von C sind unvollständig.

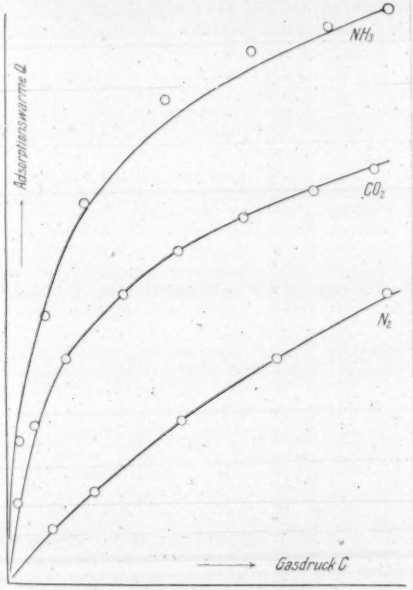


Fig. 1.

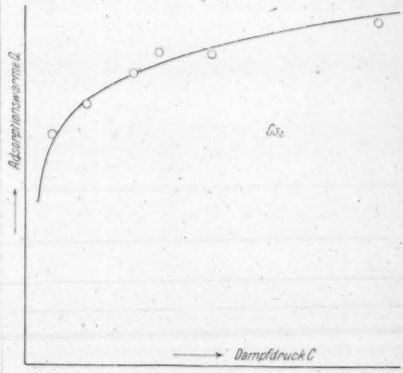


Fig. 2.

Tabelle I.

N_2 nach den Daten von A. Titoff (IX, S. 39).

$$Q_{ber.} = 71 \log_{10} (0{,}02\, c + 1).$$

Gasdruck C in cm Hg	9,1	17,7	34,4	53,1	74,7
Adsorptionswärme $Q_{ber.}$ in cal . . .	5,2	9,4	16,2	22,3	28,2
Adsorptionswärme $Q_{exper.}$ in cal . .	5,4	9,2	16,2	22,3	28,9

Tabelle II.

CO_2 nach den Daten von A. Titoff (XVII, S. 47).

$$Q_{ber.} = 57{,}1 \log_{10} (0{,}5\, c + 1).$$

Gasdruck C in cm Hg	1,9	5,5	12,2	22,9	33,8	47,1	60,6	73,1
Adsorptionswärme $Q_{ber.}$ in cal . . .	38,1	75,5	111,9	144,0	164,7	182,7	196,6	207,0
Adsorptionswärme $Q_{exper.}$ in cal .	39,5	76,0	110,5	143,2	164,7	181,9	196,2	206,7

Tabelle III.

NH_3 nach den Daten von A. Titoff (XXII, S. 52).

$$Q_{ber.} = 100 \log_{10} (1 \cdot c + 1).$$

Gasdruck C in cm Hg	0,3	2,9	7,9	16,1	31,9	49,0	63,6	74,7
Adsorptionswärme $Q_{ber.}$ in cal . . .	11,4	59,1	94,9	123,0	151,7	169,9	181,0	187,9
Adsorptionswärme $Q_{exper.}$ in cal . .	10,3	45,8	86,8	126,2	159,9	175,8	183,6	188,7

1) A. Titoff, Adsorption der Gase durch Kohle (Dissertation 1910, russisch).
2) A. Lamb u. A. Coolidge, Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 1146, 1920.

Tabelle IV.

CS_2 nach den Daten von A. Lamb und A. Coolidge.

$$Q_{ber.} = 25{,}7 \log_{10}(29 \cdot c + 1).$$

Dämpfdruck C in cm Hg	3	7	11	15	21	40
Adsorptionswärme $Q_{ber.}$ in cal	50,0	59,4	65,4	66,3	71,6	78,8
Adsorptionswärme $Q_{exper.}$ in cal	51,4	58,1	65,4	69,9	69,2	76,9
Differenz ΔQ	−1,4	+1,3	+0	−3,6	+2,4	+1,9

Die Fig. 3 gibt uns zum Vergleich den Verlauf der Kurven von Szyszkowski betreffend die Oberflächenspannung σ von Lösungen in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration C nach den Daten meines Mitarbeiters P. Rehbinder[1].

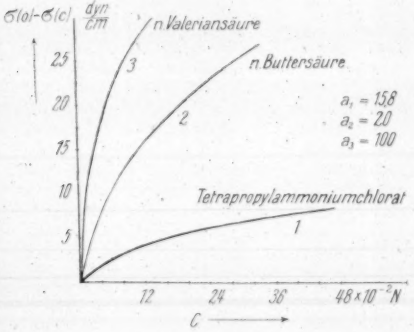


Fig. 3.

Die in der Arbeit von A. Lamb und A. Coolidge angeführten experimentellen Daten zeigen, daß sich die Adsorptionswärme der Dämpfe in ihrer Abhängigkeit von der Adsorptionskapazität x nach folgendem empirischen Gesetze:

$$Q = m x^n$$

ändert, wo n sehr nahe 1 und

$$< 1 \; (n = 0{,}97 - 0{,}90),$$

und $x = S \cdot \Gamma$ sind. Dieses wird auch durch die von uns angeführten theoretischen Beziehungen (6) und (9) bestätigt. Die Tabelle V und die Fig. 4 zeigen, daß auch für Gase

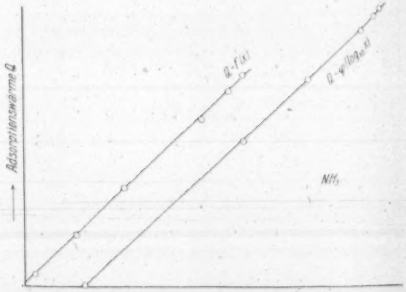


Fig. 4.

die Adsorptionswärme Q in Abhängigkeit von der Absorptionskapazität x linear ausgedrückt wird (NH_3 nach den Daten XXI von A. Titoff).

Tabelle V.

NH_3 nach den Daten von A. Titoff (XXI, S. 52).

$$Q = f(x).$$

Adsorptionskapazität x in ccm	20,9	115,2	229,7	405,8	475,6	510,0
Adsorptionswärme $Q_{exp.}$ in cal	10,5	47,8	90,5	154,4	181,4	196,0

Folgerungen.

Als Maß für die Adsorptionsaktivität[2]) des Adsorbens kann man seine Oberflächenenergie:

$$\sigma = \frac{Q N_0}{v_0 - 1} \cdot r_0$$

annehmen, wo N_0 die Anzahl Mole Gas in Kubikzentimetern bei 0° und 76 cm Hg, r_0 die Dicke der Adsorptionsschicht ist.

Einen in Wasser gelösten Stoff nennt man einen aktiven, wenn eine geringe Änderung seiner Konzentration C die Oberflächenspannung σ an der Grenze „Luft—Lösung" stark ändert. Darum kann man nach Rehbinder als Aktivitätsmaß des gelösten Stoffes im Sinne der Oberflächenspannung (Oberflächenaktivität[3])):

$G = -\frac{\partial \sigma}{\partial c}$ annehmen. Auf Grund obengenann-

1) P. Rehbinder, Zeitschr. f. phys. Chem. III, 452, 1924; Journ. d. angew. Physik (Russisch) I, 1—4, 196, 1924.

2) Iliin, Zeitschr. f. phys. Chem., l. c.

3) Rehbinder, Zeitschr. f. phys. Chem., l. c.

ter Vorstellungen kann man weder von der Aktivität eines Adsorbens noch von der Aktivität eines gelösten Stoffes, wohl aber von der gegenseitigen Phasenaktivität zweier oder mehrerer Phasen an ihrer Trennungsgrenze sprechen, wobei man unter Aktivität den Gradienten des einen oder anderen energetischen Effektes in der Abhängigkeit von der Änderung des einen oder anderen Parameters (speziell von der Konzentrationsänderung dc) in irgendeiner Phase (z. B. „die Aktivität nach der Konzentration c in der Phase x") versteht.

Von diesem verallgemeinernden Gesichtspunkte ist es verständlich, warum einige Flüssigkeiten, welche infolge einer intensiven Attraktionskraft zwischen ihnen und einem Adsorbens einen großen Wärmeeffekt und große Γ geben (große Adsorptionsaktivität), gleichzeitig infolge verhältnismäßig kleinen Unterschiedes in der Oberflächenspannung dieser Phasen eine unbedeutende Änderung von σ an der Grenze „fester Körper—Flüssigkeit" geben können (kleine Oberflächenaktivität).

Es ist auch verständlich, warum ein Gas, das verhältnismäßig kleine Adsorptionswärme gibt (kleine Adsorptionsaktivität), gleichzeitig infolge starken Unterschiedes der Oberflächenspannung eines Gases und eines Adsorbens eine große Änderung von σ gibt (große Oberflächenaktivität).

Es versteht sich von selbst, daß man dieselben Erwägungen auf beliebige energetische Beziehungen an der Grenze einer Phasentrennung, speziell auf den Wärmeeffekt und die Oberflächenspannung von Lösungen anwenden kann.

Moskau, Institut für Physik und Biophysik (früher Physikalisches Institut des Moskauer Wissenschaftlichen Instituts), 3. Miusskaja 3.

(Eingegangen 29. Juni 1925.)

Die Zunahme der Dispersion der Energie einer kanonischen Gesamtheit von Gasen.

Von Dr. Ippisch.

§ 1.

Wenn die Anzahl der Freiheitsgrade der Moleküle einer kanonischen Gesamtheit von Gasen zumindest von derselben Größenordnung ist wie die Anzahl der Moleküle selber, so besitzen alle Gase Energien $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma, \ldots$, die sich von einem mittleren Wert $\bar{\varepsilon}$ im Durchschnitt nur sehr wenig unterscheiden, oder mit anderen Worten: der Mittelwert $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ wird um so kleiner, je größer die Zahl der Freiheitsgrade ist. Zu diesem berühmten Theorem, welches Gibbs aufgestellt hat, haben P. u. T. Ehrenfest (Enzyklopädie IV 2, II Heft 6: Begriffliche Grundlagen der statistischen Mechanik) ein Beispiel gebracht, das im wesentlichen den folgenden Inhalt hat:

Es sei ein Gas gegeben, welches aus N Punktmolekülen besteht, die elastisch an Gleichgewichtslagen gebunden sind.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten dieser Moleküle mit: $x_1 y_1 z_1!$ $x_2 y_2 z_2!$ $x_3 y_3 z_3; \ldots, x_N y_N z_N$; die Momente $m\dot{x}_1, m\dot{y}_1, m\dot{z}_1; m\dot{x}_2, m\dot{y}_2, m\dot{z}_2; \ldots; m\dot{x}_N, m\dot{y}_N, m\dot{z}_N$ der Kürze halber mit: $m\xi_1, m\eta_1, m\zeta_1; m\xi_2, m\eta_2, m\zeta_2; \ldots; m\xi_N, m\eta_N, m\zeta_N$, so ist die gesamte potentielle und kinetische Energie des Gases gegeben durch:

$$\varepsilon = \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \cdots + z_N^2)$$

$$+ \frac{m}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_N^2).$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die rücktreibenden, elastischen Kräfte, welche die Atome in ihre Gleichgewichtslagen wieder zurückführen, durch die Gleichungen gegeben sind:

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -kx_1,$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial y_1} = -ky_1,$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial z_1} = -kz_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial z_N} = -kz_N,$$

d. h. sie sind proportional der ersten Potenz der jeweiligen Elongation.

Unter dieser Annahme finden P. u. T. Ehrenfest, daß dann:

1. Die „häufigste" Energie:

$$\varepsilon_m^{(1)} = \frac{6N-1}{2} \cdot T,$$

2. Die mittlere Energie:

$$\overline{\varepsilon^{(1)}} = 3N \cdot T.$$

3. Die Dispersion der Energie:

$$\frac{\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}}{(\bar{\varepsilon})^2} = \frac{1}{3N},$$

also bei hinreichendem N tatsächlich die Dispersion unmerklich wird.

(Der eingeklammerte obere Index soll anzeigen, daß die Kräfte proportional der ersten Potenz der Elongation sind.)

§ 2.

Das Ehrenfestsche Beispiel läßt sich erweitern, was von einigem Interesse sein dürfte. Bestimmt man nämlich im Ehrenfestschen Beispiel das Phasenvolumen:

$$V_N = m^{3N} \int \dots \int dx_1 \dots dz_N d\xi_1 \dots d\zeta_N,$$

so ist die Phasenfläche, welche die Grenzen des vielfachen Integrals bestimmt, das Ellipsoid:

$$1 = \frac{k}{2\varepsilon}(x_1^2 + \dots + z_N^2) + \frac{m}{2\varepsilon}(\xi_1^2 + \dots + \zeta_N^2)$$

im $6N$ dimensionalen Raum. Das Ehrenfestsche Beispiel bleibt nun in gleicher Weise der Rechnung zugänglich, wenn die Phasenfläche abgeändert wird in:

$$1 = \frac{k}{(2\nu+2)\varepsilon}(x_1^{2\nu+2} + \dots + z_N^{2\nu+2}) + \frac{m}{2\varepsilon}(\xi_1^2 + \dots + \zeta_N^2),$$

was physikalisch darauf hinauskommt, daß die rücktreibenden Kräfte gegeben sind durch Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = k x_1^{2\nu+1},$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y_1} = k y_1^{2\nu+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z_N} = k z_N^{2\nu+1}.$$

Das Ehrenfestsche Beispiel ist dann als Spezialfall $\nu = 0$ enthalten. Es ergeben sich aber dann Beziehungen des häufigsten und mittleren Energiewertes, sowie der Dispersion der Energie zum Exponenten ν, die des Interesses nicht entbehren.

Die mathematische Grundlage dieser Erwägungen bildet ein berühmtes Integral von Dirichlet:

Ist:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \dots \leq 1,$$

so ist:

$$\text{I.} \quad \int\int\int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx\, dy\, dz \dots = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \dots}{p \cdot q \cdot r \dots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\dots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \dots\right)},$$

worin das vielfache Integral über jenen Raum zu erstrecken ist, für welchen obige Ungleichung gilt und die Größen:

$$x,\ y,\ z \dots$$
$$a,\ b,\ c \dots$$
$$p,\ q,\ r \dots$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \dots$$

positiv sind.

Sind aber die Konstanten $a, b, c, \dots$ ungerade, die Konstanten $p, q, r \dots$ aber gerade ganze Zahlen, so kann die Bedingung, daß $x, y, z \dots$ positiv sein soll, fallen gelassen werden. Weil dann jede Variable $x, y, z \dots$ sowohl positiv, wie negativ werden kann, so schreibt sich das Integral dann:

$$\text{II.} \quad \int\int\int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx\, dy\, dz \dots = 2^n \cdot \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \dots}{p \cdot q \cdot r \dots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\dots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \dots\right)}$$

§ 3.

Schreiben wir also die Energiegleichung in der Form:

$$1 = \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt[2\nu+2]{\frac{(2\nu+2)\cdot\varepsilon}{k}}}\right)^{2\nu+2} + \left(\frac{y_1}{\sqrt[2\nu+2]{\frac{(2\nu+2)\cdot\varepsilon}{k}}}\right)^{2\nu+2} + \dots\right] + \left[\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}}\right)^2 + \dots\right],$$

dann ist das Phasenvolumen:

$$V = m^{3N} \int\int\int \dots dx_1 dy_1 \dots dz_N d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_N. \quad (1)$$

Der Vergleich mit dem Integral von Dirichlet II ergibt:

Erstens: Die Größen $a, b, c \dots$ sind alle $= 1$.
Zweitens: Von den Exponenten $p, q, r \dots$ sind $3N$ Exponenten $= 2\nu+2$, weitere $3N$ Exponenten sind $= 2$.
Drittens: Von den Größen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sind die ersten $3N$ Größen $= \sqrt[2\nu+2]{\frac{(2\nu+2)\varepsilon}{k}}$, die letzten $3N$ Größen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sind $= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$.

Daher ist das Phasenvolumen:

$$V = m^{3N} \cdot 2^{6N} \cdot \frac{\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)\varepsilon}{k}}\right]^{3N} \cdot \left[\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right]^{3N}}{(2\nu+2)^{3N} \cdot 2^{3N}} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2\nu+2}\right)^{3N}\right] \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{3N}}{\Gamma\left(1+\frac{3N}{2\nu+2}+\frac{3N}{2}\right)}$$

$$= \frac{m^{3N} \cdot (\sqrt{\pi})^{3N} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{2\nu+2}\right)\right]^{3N}}{\Gamma\left(1+\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}\right)} \cdot \frac{\left[\sqrt{\frac{2\nu+2}{k}}\right]^{3N} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{m}}\right]^{3N}}{(\nu+1)^{3N}} \cdot \varepsilon^{\frac{3N}{2\nu+2}} \cdot \varepsilon^{\frac{3N}{2}} \tag{2}$$

oder, wenn wir setzen:

$$\beta = \frac{m^{3N} (\sqrt{\pi})^{3N} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2\nu+2}\right)\right]^{3N}}{\Gamma\left(1+\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}\right)} \cdot \frac{\left[\sqrt{\frac{2\nu+2}{k}}\right]^{3N} \cdot \left[\sqrt{\frac{2}{m}}\right]^{3N}}{(\nu+1)^{3N}},$$

so wird:

$$V = \beta \cdot \varepsilon^{\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}}. \tag{3}$$

Das Phasenvolumen $d\lambda = \frac{dV}{d\varepsilon} \cdot d\varepsilon$ wird daher:

$$d\lambda = \beta \cdot \frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2} \cdot \varepsilon^{\frac{3N(\nu+2)-(2\nu+2)}{2\nu+2}} \cdot d\varepsilon.$$

Machen wir die Substitution:

$$\varepsilon = R^{2\nu+2}, \quad d\varepsilon = (2\nu+2) \cdot R^{2\nu+1} \cdot dR, \tag{4}$$

so wird:

$$d\lambda = \gamma \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR, \tag{5}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\gamma = \beta \cdot 3N(\nu+2). \tag{6}$$

Die Anzahl dN der Elemente der kanonischen Gesamtheit mit der Dichte $\varrho = N \cdot e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}$ die in dem Phasenvolumen $d\lambda$ liegen, ist demnach:

$$dN = \varrho \cdot d\lambda = N \cdot \gamma \cdot \varepsilon^{\frac{\psi - k^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR \tag{7}$$

wenn wir die Gleichungen (4), (5), (6) benützen.

Soll dN ein Maximum werden, so ist jenes R zu suchen, für welches:

$$f(R) = e^{-\frac{k^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1}$$

ein Extrem wird.

Nun ist:

$$f'(R) = e^{-\frac{k^{2\nu+2}}{T}} \cdot \left[-\frac{2\nu+2}{T} \cdot R^{2\nu+1} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} + [3N(\nu+2)-1] \cdot R^{3N(\nu+2)-2}\right] = 0,$$

d. h.

$$R^{2\nu+2} = \frac{3N(\nu+2)-1}{2\nu+2} \cdot T$$

oder mit Benützung von (4) ergibt sich als „häufigster" Energiewert:

$$\varepsilon_m^{(2\nu+1)} = \frac{3N(\nu+2)-1}{2\nu+2} \cdot T. \tag{8}$$

(Der eingeklammerte Index soll andeuten, daß die rücktreibenden Kräfte proportional sind den $2\nu+1$ ten Potenzen der Elongationen.)

§ 4.

Nach der Mittelwertbildung der statistischen Mechanik ist der Mittelwert der Energie gegeben durch die Gleichung:

$$\overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} = \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} \varepsilon \cdot d\lambda \tag{9}$$

mit der Nebenbedingung:

$$1 = \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} \varepsilon \cdot d\lambda. \tag{10}$$

Mit Benützung der Gleichungen (4)..., (5)..., erhalten wir aus (9) und (10):

$$\overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} = e^{\frac{\psi}{T}} \cdot \gamma \int e^{-\frac{k^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{2\nu+2} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR$$

und

$$1 = e^{\frac{\psi}{T}} \cdot \gamma \int e^{-\frac{k^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR.$$

Durch Division folgt daraus:

$$\varepsilon^{(2\nu+1)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)+2\nu+1} dR}{\int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} dR} \quad (11)$$

Führen wir für einen Augenblick die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} J_{3N(\nu+2)+2\nu+1} &= \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)+2\nu+1} \cdot dR \\ J_{3N(\nu+2)-1} &= \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR \end{aligned}\right| \quad (12)$$

so ist: $$\varepsilon^{(2\nu+1)} = \frac{J_{3N(\nu+2)+2\nu+1}}{J_{3N(\nu+2)-1}} \quad (13)$$

Durch partielle Integration des ersten Integrals von (12) folgt aber:

$$\left.\begin{aligned} J_{3N(\nu+2)+2\nu+1} &= e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \left(-\frac{T}{2\nu+2} \cdot R^{3N(\nu+2)}\right)\Big|_0^\infty \\ &+ \frac{3N(\nu+2)\cdot T}{2\nu+2} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} dR = \frac{3N(\nu+2)\cdot T}{2\nu+2} \cdot J_{3N(\nu+2)-1} \end{aligned}\right| \quad (13a)$$

weil der voran integrierte Bestandteil an beiden Grenzen verschwindet. Also wird endgültig der „mittlere" Wert der Energie:

$$\overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} = \frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2} \cdot T. \quad (14)$$

§ 5.

Wir bilden das Mittel des Quadrates der Abweichung vom Mittelwert der Energie: d. h. die Größe: $\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2}$. Nach der Mittelwertsbildung der statistischen Mechanik ist:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2 d\lambda. \quad (15)$$

mit der Nebenbedingung:

$$1 = \int e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} \cdot d\lambda.$$

Führen wir in die beiden letzten Gleichungen die Werte aus (4), (5), (6) ein, so wird:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = e^{\frac{\psi}{T}} \cdot \gamma \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \left(R^{2\nu+2} - \frac{3N(\nu+2)\cdot T}{2(\nu+1)} \cdot T\right)^2 \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR$$

und

$$1 = e^{\frac{\psi}{T}} \cdot \gamma \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR.$$

Durch Division erhält man:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot \left(R^{2\nu+2} - \frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} \cdot T\right)^2 \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR}{\int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)-1} \cdot dR} \quad (15a)$$

Führen wir noch zu den Gleichungen (12) die Bezeichnung:

$$J_{3N(\nu+2)+4\nu+3} = \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R^{3N(\nu+2)+4\nu+3} \cdot dR \quad (16)$$

ein, so geht (15a) über in:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = J_{3N(\nu+2)+4\nu+3} - \frac{3N(\nu+2)\cdot T}{\nu+1} \cdot J_{3N(\nu+2)+2\nu+1} + \frac{9N^2(\nu+2)^2 \cdot T^2}{4(\nu+1)^2} \cdot J_{3N(\nu+2)-1} \quad (17)$$

$$J_{3N(\nu+2)-1}$$

Aus der Gleichung (16) folgt durch partielle Integration:

$$J_{3N(\nu+2)+4\nu+3} = e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot \left(\frac{-T}{2\nu+2} \cdot R^{3N(\nu+2)+2\nu+2}\right)\Bigg|_0^\infty + \frac{3N(\nu+2)+2\nu+2}{2\nu+2} \cdot T \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{R^{2\nu+2}}{T}} \cdot R_{3N(\nu+2)+2\nu+1} \cdot dR.$$

Der voran integrierte Bestandteil verschwindet an den Grenzen und es wird:

$$J_{3N(\nu+2)+2\nu+3} = \left[\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2} + 1\right] \cdot T \cdot J_{3N(\nu+2)+2\nu+1} \quad (18)$$

und auf Grund der Gleichung (13a) ist:

$$J_{3N(\nu+2)+2\nu+1} = \left[\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}\right] \cdot T \cdot J_{3N(\nu+2)-1}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Rekursionsformeln geht der Ausdruck (17) über in:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = \left[\left(\frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} + 1\right) \cdot \frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} \cdot T^2 - \frac{3N(\nu+2)}{\nu+1} \cdot \frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} \cdot T^2 + \frac{9N^2(\nu+2)^2}{4(\nu+1)^2} \cdot T^2\right] \cdot \frac{J_{3N(\nu+2)-1}}{J_{3N(\nu+2)-1}}$$

und nach gehöriger Reduktion ist:

$$\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = \frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} \cdot T^2.$$

Mit Berücksichtigung des Mittelwertes der Energie Gl. (14) wird also das übliche Maß für die Dispersion der Energie gegeben durch:

$$d^{(2\nu+1)} = \frac{\overline{(\varepsilon - \varepsilon^{(2\nu+1)})^2}}{(\varepsilon^{(2\nu+1)})^2} = \frac{1}{\frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}} \quad (19)$$

§ 6.

Die Gleichungen (8), (14) und (19) stellen also bei beliebig potenziertem Kraftgesetz die häufigste, die mittlere Energie bzw. die Dispersion der Energie dar; für $\nu = 0$ erhält man:

$$\varepsilon_m^{(1)} = \frac{6N-1}{2} \cdot T; \quad \overline{\varepsilon^{(1)}} = 3N \cdot T;$$

$$d^{(1)} = \frac{1}{3N}$$

in völliger Übereinstimmung mit den Werten des Ehrenfestschen Beispiels: Enzyklopädie Band IV 2 II, Heft 6. Seite 57.

Aus den allgemeinen Gleichungen aber läßt sich schließen: Sei $f(\nu) = \frac{3N(\nu+2)}{2\nu+2}$; dann ist nach (19) $d^{2\nu+1} = \frac{1}{f(\nu)}$; ebenso: $d^{2\nu-1} = \frac{1}{f(\nu-1)}$; es ist aber: $f(\nu-1) > f(\nu)$, denn

$$\frac{3N}{2} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} > \frac{3N}{2} \cdot \frac{\nu+2}{\nu+1},$$

d. h. $1 + \frac{1}{\nu} > 1 + \frac{1}{f(\nu+1)}$; also ist:

$$\frac{1}{f(\nu-1)} < \frac{1}{f(\nu)},$$

d. h. aber:

$$\underline{d^{(2\nu-1)} < d^{2\nu+1}}, \quad (20)$$

d. h. die Dispersion der Energie wächst mit dem Exponenten des Kraftgesetzes; ferner ist:

$$\lim_{\nu \to \infty} d^{(2\nu+1)} = \frac{1}{\frac{3N}{2}} = 2d^{(1)},$$

d. h. die Dispersion der Energie steigt mit dem Exponenten des Kraftgesetzes bis auf den doppelten Betrag, den sie im Ehrenfestschen Beispiel hat.

Nach Gleichung (14) ist weiter:

$$\overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} = \frac{3N(\nu+2)}{2(\nu+1)} \cdot T$$

und

$$\overline{\varepsilon^{(2\nu-1)}} = \frac{3N(\nu+1)}{2\nu},$$

d. h.

$$\underline{\overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} < \overline{\varepsilon^{(2\nu-1)}}}, \quad (21)$$

d. h. die mittlere Energie nimmt mit wachsendem Exponenten ab; und da:

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{\varepsilon^{(2\nu+1)}} = \frac{3N}{2} \cdot T,$$

so fällt die mittlere Energie bis auf den halben Betrag mit steigendem Exponenten.

Endlich ist nach Gleichung (8)

$$\varepsilon_m^{(2\nu+1)} = \frac{3N(\nu+2)-1}{2(\nu+1)} \cdot T$$

und

$$\varepsilon_m^{(2\nu-1)} = \frac{3N(\nu+1)-1}{2\nu} \cdot T,$$

nun ist:

$$\frac{3N(\nu+1)-1}{2\nu} > \frac{3N(\nu+2)-1}{2(\nu+1)}$$

oder:

$$3N\nu^2 + 6N\nu + 3N - \nu - 1 > 3N\nu^2 + 6N\nu - \nu$$

oder: $3N - 1 > 0$, was sicher erfüllt ist. Also wird:

$$\varepsilon_m^{(2\nu+1)} < \varepsilon_m^{(2\nu-1)}, \qquad (22)$$

d. h. der Betrag der häufigsten Energie nimmt mit wachsendem Exponenten ab; und da:

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_m^{(2\nu+1)} = \frac{3N \cdot T}{2},$$

so folgt weiter: mit steigendem Exponenten werden die Beträge der häufigsten und der mittleren Energie gleich.

Aus der Gleichung (21) läßt sich noch ein Schluß bezüglich der potentiellen Energie ziehen; da der Mittelwert der kinetischen Energie $\frac{3NT}{2}$ ist und

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon^{(2\nu+1)} = \frac{3NT}{2},$$

so nimmt die potentielle Energie mit steigendem Exponenten des Kraftgesetzes bis zur Grenze o ab.

(Eingegangen am 10. Juli 1925.)

BESPRECHUNGEN.

Max Born, Vorlesungen über Atomdynamik. Erster Band, herausgegeben unter Mitwirkung von F. Hund. IX u. 358 Seiten. 43 Abb. Berlin, Julius Springer. 1925. Geh. M. 15.—, geb. M. 16.50.

Die Entwicklung der theoretischen Physik im letzten Jahrzehnt hat bewirkt, daß sich zwei Gebiete der Mathematik, die in dieser Wissenschaft schon vor längerer Zeit sehr weitgehend ausgearbeitet waren, auf deren Kenntnis der Physiker aber mit einem Seufzer der Erleichterung bisher verzichten zu können glaubte, als wichtigste Hilfsmittel der theoretischen Physik gezeigt haben. Das eine ist die allgemeine Tensoranalysis, welche die Relativitätstheorie beherrscht, das andere die allgemeine Mechanik und Störungstheorie, die von den Astronomen begründet und schon lange benützt, nun zur Beschreibung der Elektronenbewegung in den Atomen herangezogen werden muß. Ihre Methoden findet man besonders in den Méthodes nouvelles de la mécanique céleste von Poincaré, dem sie eine weitgehende, noch unausgeschöpfte Förderung verdanken. Aber sowohl dieses Buch als das in deutscher Sprache bisher meist benützte Werk, die Himmelsmechanik von Charlier, ist auf die astronomischen Anwendungen zugeschnitten, wobei es auf möglichst genaue zahlenmäßige Rechnung für Zeiten von höchstens einigen hundert Umläufen ankommt. Außerdem sind die allgemeinen Formeln in formal-abstrakter Weise abgeleitet und besprochen.

Hier will nun das Bornsche Buch eingreifen, indem es zeigt, wie man die Verfahren auf Probleme der Atomphysik anwendet, dann möglichst lückenlos vorführt, was die Methode leistet und aus den Stellen, an denen sich bei strenger Rechnung Widersprüche mit der Erfahrung ergeben, Andeutungen dafür zu entnehmen sucht, wo und wie die Gesetze der Mechanik abzuändern sind.

Der Stoff deckt sich also insofern mit dem des Sommerfeldschen Buches, als es sich auch um Atomfragen handelt. Aber die Auswahl ist unter anderm Gesichtspunkt getroffen, denn nicht das physikalische Interesse, sozusagen die Freude an den Eigenschaften der Materie, ist maßgebend, sondern die Frage der Behandelbarkeit nach den Gesetzen der Mechanik, wie aus der gleich anzugebenden Inhaltsübersicht erhellt.

Es sei gleich betont, daß das Buch seinen Zweck in hervorragender Weise erfüllt. Wenn man das erste Kapitel, in welchem — nach einer kurzen Einleitung über Quantentheorie im allgemeinen — die Grundlagen der Hamilton-Jacobischen Theorie behandelt werden, liest, hat man beinahe das Gefühl der Verwunderung, daß diese Dinge so einfach sind. Hier wird die Hamiltonsche Differentialgleichung sowie die Berührungstransformation eingeführt. Besonders angenehm ist, daß gleich einige der wichtigsten Transformationsformeln mit ihren Ableitungen gegeben werden.

Das zweite Kapitel behandelt dann die Theorie der periodischen Bewegung mit einem Freiheitsgrad und die Anwendung der allgemeinen Methode auf diesen Fall. Es wird hier gleich Adiabatenhypothese und Korrespondenzprinzip angeschlossen, was den Vorteil hat, daß diese beiden weitreichenden Prinzipien hier verhältnismäßig einfach und leichtverständlich sind. Als Anwendung folgen der Rotator (Rotationsbandenspektrum) und der anharmonische Oszillator (spezifische Wärme bei sehr hoher Temperatur!).

Nun folgt der schwierige Übergang zu mehreren Freiheitsgraden, der von einem Paragraphen über mehrfache Fourierreihen eingeleitet wird. Dann kommt die Separationsmethode, wobei an Beispielen die Entartung erwähnt wird, dann der Beweis der Eindeutigkeit der Wirkungsvariablen, der sonst in der Literatur meist angedeutet, aber nicht durchgeführt wird. Es schließt sich Adiabaten- und Korrespondenzprinzip für diesen Fall an, wobei auch die bemerkenswerte von Kramers gefundene Vorschrift erwähnt wird, wie man durch Mitteilung über die Umlaufszahl von Anfangs- und Endbahn die Frequenz der Strahlung findet. Die Methode der säkularen Störungen

beschließt den allgemeinen Teil des Kapitels, dessen beide letzten Paragraphen als Beispiel die Kreiselbewegung (Molekülrotation, Bandentheorie) behandelt.

Das dritte Kapitel bringt die Anwendungen auf Atome, wobei als physikalische Einschränkung angenommen wird, daß ein einziges Leuchtelektron vorhanden sei, und daß keine Rückwirkung seiner Bewegung auf den Rumpf erfolgt, was nach Born nur auf nichtmechanische Weise erklärbar ist.

In den ersten 10 Paragraphen wird in der auch sonst bekannten Weise zuerst die Theorie der Bewegung eines Elektrons in einem Coulombschen Feld, dann die in einem Zentralfeld und endlich die Theorie der Tauchbahnen entwickelt. Im Anschluß daran wird zum erstenmal versucht, die Bohrschen Gedanken über das periodische System systematisch abzuleiten, indem aus den spektral gemessenen effektiven Quantenzahlen auf die wahren Quantenzahlen geschlossen wird; hierbei stützt man sich auf die modellmäßig zu erwartende Abhängigkeit der Rydbergkorrektion von der Ordnungszahl. In den folgenden 7 Paragraphen werden in sehr eleganter Weise die gestörten Bewegungsformen (Relativitätskorrektion, Zeemaneffekt, Starkeffekt, gekreuzte Felder, zweiter Kern) behandelt, teilweise durch direkte Separation, teilweise, indem in die Störungsfunktion die schon in früheren Paragraphen ein für allemal gemittelten ungestörten Werte eingesetzt werden.

Das letzte Kapitel endlich behandelt die hauptsächlich vom Verfasser und seinen Mitarbeitern ausgearbeiteten Methoden der Störungstheorie, die auf die Auswahl geeigneter Transformation hinauslaufen, welche die für das ungestörte Problem gültigen Wirkungsvariabeln in die für das gestörte maßgebenden verwandeln, wobei die verschiedenen Arten der „Entartung" besondere Maßregeln erfordern. Im Anschluß daran wird das merkwürdige, von Born und Heisenberg aufgefundene Resultat bewiesen, daß die Quantentheorie häufig strenge Phasenbeziehungen zwischen Systemen, die aufeinander einwirken, verlangt. Das kommt so heraus: Man kann bei Abwesenheit solcher Beziehungen die auftretende Bewegung als kleine Schwingung (z. B. um die Gleichphasigkeit) auffassen, die Quantentheorie verbietet aber kleine Schwingungen. Den Beschluß bildet der Nachweis, daß beim Helium die angeführten Methoden zu einem Widerspruch mit der Erfahrung führen.

Wenn der Referent zum Schluß einen Wunsch für die Neuauflage aussprechen darf, so geht er dahin, der Autor möge die hier mit soviel Erfolg gewählte Darstellungsart noch auf einige Stellen ausdehnen, die dem nicht ganz mathematisch-formal Denkenden erfahrungsgemäß Schwierigkeiten bereiten. Die erste liegt bei der Einführung der Wirkungsvariablen. Hier wäre vielleicht folgendermaßen zu sagen: Der Zusammenhang zwischen den p, q und den I, w ist ein allgemeiner, er bildet einfach den p, q Raum auf einen I, w-Raum ab. Das spezielle Problem zeichnet nun im p, q-Raum bestimmte Kurven als Bahnkurven aus. Die Wirkungsvariablen sind diejenigen I, w, die die Bahnkurven in eine gerade Linie mit konstantem I abbilden.

Die zweite, wichtigere Stelle ist S. 91, 92, wo die Phasenintegrale so definiert werden, daß w_i um 1 wächst, die andern w_k, $k \neq i$ aber konstant bleiben. Hier wäre hervorzuheben, daß das keine mechanisch mögliche Bewegung ist, in welcher ja das gemeinsame lineare Wachsen aller w vorgeschrieben ist; ein Beispiel bei der Rosettenbewegung, wo z. B. ein voller Umlauf in φ erfolgen würde, ohne daß r die beiden Librationsgrenzen berührt, würde die Deutlichkeit wesentlich erhöhen.

Um zusammenzufassen, ist das Bornsche Buch das Lehrbuch der Atommechanik, das die Einarbeitung zwar nicht ohne Mitarbeit, wohl aber ohne allzu große Schwierigkeiten möglich macht und zugleich deutlich die Grenzen der Methode absteckt. Die frische Darstellung macht die Mitarbeit zum Vergnügen.

Herzfeld.

B. Gutenberg, Die seismische Bodenunruhe und ihr Zusammenhang mit den Nachbargebieten, insbesondere Geologie und Meteorologie. 8°. 69 S. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1924. Geh. M. 4.20.

Der „feste" Untergrund, auf dem wir leben, auf dem unsere Gebäude ruhen, ist — auch abgesehen von Erdbeben und den regelmäßigen Gezeitenbewegungen des festen Erdkörpers — in einer fortdauernden Unruhe. Die Bewegungen sind mehr oder weniger periodisch. Die Periodenlänge hat sehr verschiedene Größenordnung von $^1/_{100}$ Sek. bis mehrere Minuten. Die Amplitude schwankt zwischen 10^{-6} bis nahezu 1 mm. Die maximale Beschleunigung von einigen Zehnern bis herab zu einigen hundertstel Milligal. (Gal Einheit der Beschleunigung im c. g. s. System.) Die Ursache dieser Bewegung ist eine sehr verschiedenartige: Meeresbrandung, Wind, Sturm, Frost, Bodenerwärmung, Grundwasserschwankung, Luftdruckänderung, Vulkanische Tätigkeit, Wasserfälle, Verkehr, Maschinenbewegungen.

Gutenberg hat in der obigen Einzeldarstellung in umfassender Weise alle diese Erscheinungen mit weitgehender Literaturangabe behandelt. Leider konnte die eingehende Arbeit von Gherzi, (Études sur les Microséismes Zikawei 1924) noch nicht berücksichtigt werden und zu den teilweise von der Gutenbergschen Darstellung abweichenden Ansichten Stellung genommen werden. Gutenberg hat das reichhaltige Beobachtungsmaterial übersichtlich zusammengefaßt und nach den verschiedenen Ursachen geordnet.

Die Hoffnung, die sich vielfach an die Untersuchungen der Bodenunruhe geknüpft hat, nämlich Aussagen zu machen über die Dicke der schwingenden Schicht und die Tektonik des Untergrundes, haben sich bisher wenig erfüllt, doch liegt dies zum Teil an der Verwendung ungeeigneter Methoden und dem spärlichen Ausmaß systematischer Experimente. Die physikalische Seite des Problems, die Frage, welche Schichten schwingen und in welcher Form, ist noch nicht gelöst. Der heutige Stand unserer Kenntnis der Bodenunruhe ist in dem besprochenen Heft anschaulich dargestellt.

Angenheister.

É. Picard, Mélanges de mathématiques et de physique. 16 × 25 cm. 364 S. Paris, Gauthier-Villars. 1924. Geh. Frcs. 25.—.

Der hervorragende französische Mathematiker hat bereits einmal in einem Band „Discours et mélanges" Reden und Aufsätze über Geschichte und allgemeine Ziele der exakten Wissenschaften vereinigt. Der vorliegende Band bringt 26 Artikel ähnlichen Inhalts. Die Mehrzahl davon knüpft an die Namen großer Mathematiker und Physiker an, denen der „Secrétaire perpétuel de l'académie des Sciences" Nachrufe und Festreden gehalten hat. Dazwischen finden sich Aufsätze über allgemein interessante Fragen der Physik und Mathematik abgedruckt, wie sie ein Mann von der Stellung Picards gelegentlich für Jahrbücher u. ä. zu schreiben hat.

Neben reiner Mathematik (z. B. Nachrufe auf Weierstraß, Sylvester, Abel, Hermite) treten vor allem die Interessen des Verfassers für Mechanik und

für Relativitätstheorie hervor, erstere in zwei sehr übersichtlichen kritischen Referaten über Arbeiten von Sundman und Poincaré betreffend das 3. Körperproblem und Verwandtes. Schön ist auch der umfangreichere Aufsatz (50 Seiten) über die Theorien der Optik und das Werk von Hippolyte Fizeau. Unter anderem ist hierin bemerkenswert, daß Fizeau in einem Gutachten, das er der französischen Akademie 1867 vorgelegt hat, die jetzt von Michelson ausgebildete Methode der Bestimmung der Sterngröße durch Anbringung zweier Spalte vor dem Fernrohrobjektiv angegeben hat.

Es ist Akademiestil im guten Sinn, der aus den Aufsätzen spricht; getragen von einer sehr regen und umfassenden geistigen Tätigkeit, geschärftem Blick für das Wesentliche, jahrzehntelangem Verkehr in einem Kreise geistiger Elite, aber auch — gelegentlich — nicht unberührt von einem gewissen „Familiendünkel", der alles Wesentliche mit dem Namen und der Tradition der eignen Gesellschaft verknüpfen möchte.

Ewald.

E. Warburg, Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge. 8°. X u. 106 S. Mit 18 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1924. M. 5.70.

Das Buch enthält in der dem Verfasser bekanntermaßen eigenen knappen und klassisch klaren Form eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der wichtigsten Ausgleichsvorgänge, insbesondere der Wärmeleitung, eine Darstellung, bei der der Verfasser nach seinen eigenen Worten die Bedürfnisse des Experimentalphysikers und des Technikers im Auge gehabt hat. Nach einer kurzen Einleitung über den Begriff der ausgleichenden Vorgänge, in der sehr übersichtlich, weil formelmäßig, reversibler und irreversibler Ausgleich von Temperaturdifferenzen einander gegenübergestellt werden, wendet sich der Verfasser im ersten Abschnitt der allgemeinen Theorie der Wärmeleitung zu. Im zweiten Abschnitt behandelt er den stationären Wärmefluß mitsamt dem elektrischen Analogon. Bei den Anwendungen der Theorie des stationären Wärmeflusses, die er im zweiten Teil dieses Abschnittes bespricht, nimmt er ausgiebig Bezug auf technisch wichtige und experimentell behandelte Probleme und zeigt dabei die Wichtigkeit der theoretischen Erörterungen. Besonders erwähnt sei seine Theorie des Bolometers, die Behandlung der thermischen Isolierung und des thermischen Widerstandes eines feingekörnten Pulvers, ferner die Berechnung der Temperatur des Gases in Geißlerschen Röhren. Der dritte Abschnitt enthält die zeitlich veränderlichen Zustände bei einseitig begrenzten und bei mehrseitig begrenzten Körpern. Im ersten Teil werden auch Aufgaben behandelt wie: Wärmeerzeugung durch radioaktive Substanzen in der Erde und deren Einfluß auf die Zeit, die seit dem Erstarren der Erde verflossen ist; Schätzung geologischer Zeiträume nach der Theorie der radioaktiven Umwandlungen; Bestimmung von Diffusionskoeffizienten; ferner die unter Warburgs Leitung im Berliner Institut seinerzeit ausgeführten Wärmeleitungsbestimmungen an Stäben. Im vierten Abschnitt endlich finden wir eine in aller Kürze umfassende Behandlung der Flüssigkeitsreibung und als Anwendung dazu die Besprechung der verschiedenen Methoden der Bestimmung der inneren Reibung und Gleitung der Gase.

Das Büchlein wird seiner Bedeutung entsprechend in allen physikalisch interessierten Kreisen großen Anklang finden.

Valentiner.

F. P. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. (Nach der zweiten engl. Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelstern-Schmid). 628 S. J. Springer. 1924.

Als Band 17 der Monographiensammlung „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen", haben die Herausgeber die vorliegende Übersetzung des bekannten Lehrbuches der analytischen Mechanik von Whittaker ausgewählt. Daß dies geschehen ist, wird allgemein begrüßt werden und es ist wohl überflüssig, hier nochmals auf den Wert dieses in jeder Beziehung vorzüglichen und empfehlenswerten Werkes hinzuweisen. Es mag genügen zu sagen, daß die Übersetzung, von einigen wenigen Kleinigkeiten abgesehen, vortrefflich gelungen ist und an Präzision und Klarheit des Ausdrucks dem englischen Original nicht nachsteht sowie daß die äußere Ausstattung mustergültig ist.

R. Seeliger.

Tagesereignisse.

Die **Technische Hochschule Karlsruhe** blickt in diesen Tagen auf ein Jahrhundert technischer Arbeit zurück, auf eine Zeitspanne, die zusammenfällt mit der gewaltigen Entwicklung neuzeitlicher Technik. Sie hat in dieser Entwicklung zum Teil an führender Stelle eingegriffen durch die Männer, die an ihr als Lehrer gewirkt, die aus ihren Lehrsälen und Laboratorien hinaus in die Praxis gezogen sind.

Einen großen Teil dieser früheren Angehörigen hofft die Technische Hochschule an der vom 28. bis 31. Oktober stattfindenden Hundertjahrfeier vereinigt zu sehen. Der Hauptfestausschuß (Kaiserstr. 12) erteilt bereitwilligst nähere Auskunft über die Einzelheiten der Feier, Wohnungsnachweis usw.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Ing. F. Kögl für organische Chemie, an der Universität Göttingen Dr. Erich Bessel-Hagen für Mathematik, an der Universität Berlin Dr. Koch für Meteorologie, der Assistent Dr. Ullrich Tomicek als Privatdozent für analytische Chemie an der Karlsuniversität in Prag.

Ernannt: Der a. o. Professor für physikalische Chemie an der Universität München Dr. Kasimir Fajans zum ord. Professor an derselben Hochschule, der associate Professor an der Yale University Arthur I. Hill zum ord. Professor der organischen Chemie ebenda, der a. o. Professor und Hauptobservator an der Sternwarte München Dr. E. Großmann zum ord. Professor an der Universität München (wiederholt wegen Entstellung der Notiz in **26**, 456, 1925), der a. o. Professor an der Universität Halle A. Wigand an die landwirtschaftliche Hochschule Hohenheim-Stuttgart als ord. Professor für Physik und Meteorologie und Leiter der Erdbebenwarte und der Meteorologischen Station I. Ordnung in Hohenheim, als Nachfolger des emeritierten Professors Mack.

Gestorben: Der Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Breslau Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Otto Lummer, der frühere Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam Geh. Regierungsrat Professor Dr. Gustav Müller, der Herausgeber des Handbuch der anorganischen Chemie (bei S. Hirzel in Leipzig) Oberregierungsrat Dr. Friedrich Auerbach.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G.

Physikalische Apparate

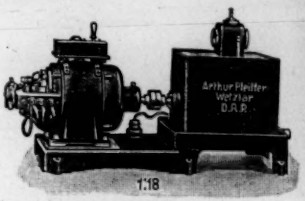
Demonstrations - Rundfunk - Empfangs - Apparate
Oelluftpumpen und Gebläse
Längen- und Kreisteilmaschinen
Komparatoren ✳ Funkeninduktoren
Megadiaskope ✳ Verdunkelungen
Experimentier-Schalttafeln
Laboratorienmöbel

Max Kohl A.-G. Chemnitz 4

Gründungsjahr 1876

Der Kauf von physikalischen Apparaten ist Vertrauenssache!

Pfeiffer's



1:18

Rotierende Öl-Luftpumpe D.R.P.

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe
ganz aus Stahl D. R. P. angem.

1:20

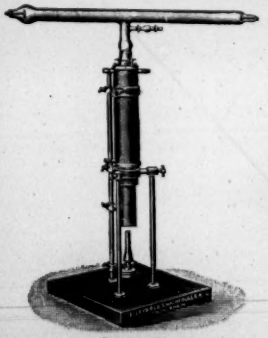
15 Liter bis zum Aussetzen jeder Entladung in 10 Sek. vom Vorvakuum ab.
Listen von Abt. H anfordern.

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr., 1922, pag. 463.

Hochvakuum-Pumpen, Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 120 cbm per Stunde
Photometer aller Systeme
Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.
Funken-Induktoren bis 1000 mm Funkenlänge
Oscillographen

Arthur Pfeiffer
Wetzlar 8
Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall
nach Prof. Gaede
D.R.P. und Auslandspatente


$^1/_{10}$ nat. Gr.

Saugleistung: 15 Liter per Sek.
Vorvakuum: 20 mm
„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

E. Leybold's Nachfolger A.-G.
Köln a/Rhein, Brüderstr. 7

Sonderliste auf Wunsch

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.